欧姆社学习漫画

漫画 虚数和复数

〔日〕相知 政司／著
〔日〕石野 人衣／漫画绘制
〔日〕トレンド・プロ／漫画制作
高丕娟／译

科学出版社

欧姆社学习漫画

漫画虚数和复数

〔日〕相知 政司 著

〔日〕石野 人衣 漫画绘制

〔日〕トレンド・プロ 漫画制作

高丕娟 译

科学出版社

北 京

图字：01-2011-3690号

内 容 简 介

你是不是正在学习数学中的虚数和复数知识呢？你是不是对虚数和复数知识感兴趣呢？那么，对你来说，这本书再适合不过了。这是世界上最简单易学的虚数和复数教科书与普及读物，它通过漫画式的情境说明，让你边看故事边学知识，每读完一篇就能理解一个概念，只要你跟着主人公的思路走，那么你肯定能在较短的时间内掌握虚数和复数的相关知识。

有趣的故事情节、时尚的漫画人物造型、细致的内容讲解定能给你留下深刻的印象，让你过目不忘。不论你是学生、上班族还是已经自己创业的“老板”，活学活用虚数和复数知识，定会给你的学习、工作与生活增添更多的便利。

图书在版编目（CIP）数据

漫画虚数和复数/（日）相知政司著；（日）石野人衣漫画绘制；（日）トレンド・プロ漫画制作；高丕娟译.—北京：科学出版社，2012
（欧姆社学习漫画）
ISBN 978-7-03-035244-6

Ⅰ.漫… Ⅱ.①相…②石…③ト…④高… Ⅲ.复数-普及读物 Ⅳ.O122-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第177006号

责任编辑：张丽娜　赵丽艳 / 责任制作：董立颖　魏　谨
责任印制：赵德静 / 封面制作：泊　远

北京东方科龙图文有限公司　制作
http://www.okbook.com.cn

科学出版社　出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市四季青双青印刷厂　印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012年10月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2012年10月第一次印刷　印张：14 1/2
印数：1—5 000　字数：232 000

定价：32.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

Original Japanese language edition
Manga de Wakaru Kyosuu Fukusosuu
By Masashi Ohchi and TREND-PRO

Published by Ohmsha, Ltd.
This Chinese version published by Science Press, Beijing
Under license from Ohmsha, Ltd.

マンガでわかる　虚数・複素数
相知政司　2010
オーム社

著 者 简 介

相知政司

出生于1964年12月，1989年日本长崎大学研究生毕业后，就职于一家普通民营企业。工作两年后，为了实现研究员的梦想，于1991年进入佐贺大学担任助理一职。2000年3月获博士（工学）学位，2000年4月成为佐贺大学讲师，2002年成为该大学副教授，2008年成为千叶工业大学教授。

株式会社トレンド・プロ

1988年创立。公司灵活利用漫画为报纸、杂志制作广告专刊，并承接政府、大型企业及社会团体等的广泛领域内的漫画广告制作。近年来，公司利用数字化内容积极参与广告制作和出版策划工作。

关于公司的更多详情请参见公司官方网站：http://www.ad-manga.com/

永川成基

脚本制作。

石野人衣

漫画绘制。

マッキーソフト株式会社

DTP。

前 言

现在的大学生面对的教育资源可谓相当丰富，但不可思议的是，很多电气相关专业的大学生连电气回路的讲义都听不懂。我也在大学里讲授电气回路相关的课程，因此也有机会亲眼目睹连简单的电气回路问题都解答不出来的大学生。对此我深感焦虑，总觉得不采取点应对措施实在是不行，但却一直苦于没有找到治疗这一“病症”的“特效药”。经过深入调研，我了解到，不会解答电气回路问题的学生多数是因为不会进行复数相关的计算，或者是不能熟练应用与复数相关的计算。为此，经过与欧姆社商谈，我执笔编写了这本漫画教科书。

虚数在英语中被称作 Imaginary Number，意思是想象出的数字，但奇怪的是，翻译过来之后却变成了“虚幻的数字”，这让人们对它的第一印象就非常糟糕。然而，实际存在的数字难道就实实在在存在于自然界中吗？其实，人类只不过是由着自己的性情随意创造出数字罢了，无论是在没有数字的年代，还是在今天，自然现象依然如故。人类只不过是借助于数字和数学算式这些工具来表示自然现象，从而便于理解自然现象罢了。

在分析电气回路的时候，特别是在分析交流电路的时候，复数作为一种强有力的计算方法，被用来计算实际存在的电压波形和电流波形。大学里学习的电气回路的讲义，其主要内容就是被称作交流电理论的部分，如果不能掌握用复数来分析电压和电流这一知识点，考试时就难以得分。另外，在我们生活的这个社会中，有很多种与电气相关的资格证书考试，而这些资格证书的考试内容，有很多都是与交流电理论相关的问题，也就是需要用虚数和复数来进行解答的问题。

本书就是一本关于虚数和复数相关知识的入门书籍，如果能有更多的人因为这本书的缘故而对用虚数和复数进行计算的电气回路知识产生了兴趣，哪怕只多一位这样的读者朋友，对我来说也是莫大的荣幸。

最后，衷心地感谢对本书出版事宜自始至终都给予很大帮助的欧姆社开发局的诸位同仁，将我拙劣的原稿用妙趣横生、易于理解的漫画表现出来的永川成基老师和石野人衣老师，以及株式会社トレンド・プロ的各位同仁。

另外，因为本书并不是数学专业书籍，因此，用数学的严密性来分析本书的表述时，可能有些地方会让人觉得不够严谨。而且，本书的有些表述可能与数学相关真实事件有些不同，这主要是为了便于初学者更好地理解虚数和复数的概念，希望广大读者朋友能够提前明了这一点。

相知政司

目　录

$i^2=-1$

PROLOGUE

序　章

ai 的开始

接下来……
是黑暗的高三岁月！
然后就是梦想中的
大学生活了！为恋爱
和学习而努力！
哈哈！
理科专业全是
男生……
这比应试备
考还要痛苦！
先不管这些啦！
哒哒


考试中
请肃静
选择逃避的结果
就是这样的……
虚数什么的完全不懂……
唯一明白的只有……
啪
数学测试成绩
以下同学需要补考
1011023 樱井优太
101041 乔木凉
啪
虚数这东西，
真讨厌！
当当当当
要补考啦！
优太！
既然我来了，
你就放心吧！
真的吗，
前辈？！

咔
咔
数学测试补考
咔
咔
前辈不是也要补考嘛！
可他为什么一脸得意的样子呢？！
不行的话就重修一年吧！
哈哈哈哈
啪
啪
看来前辈也指望不上啊……
咦？
大家好，我是研究生，我叫冰室。
因为老师有急事，我来代他监考。


冰室小姐……
可真是个美人啊！
哒
哒
……
！
哦？在看我吗？
嘿嘿嘿
从这儿好像能看到答案。
……
监考的冰室小姐，
长得可真漂亮啊！
啊?！你是说“数学女王”吗？
那家伙刚才作弊未遂，看着就来气！
别痴心妄想了！


听说跟她有瓜葛的结果就是被拖到数学地狱里从此永无翻身之日……
嘻嘻，好想跟冰室小姐谈谈关于爱的话题……
要听进去别人的话哦！
关于ai？好啊！
啊？
冰室小姐?!
啾
走吧！
砰
啊？
啊？
啊？
好可怜！
数学系教研室
冰室研究室
咔


数学系教研室
冰室研究室
那么……
关于i，
虚数i
嗯……
我们谈谈吧！
不是爱啊？是虚无的数i啊……
虚数i
哼
虚数可不是什么虚无的意思！
啊？
既然叫虚数……
不就是表示不存在的虚无的数吗？
i是imaginary number的i，表示的是由想象力创造出来的数。
imaginary number
咔
人类创造了虚数，从而改变了世界。
我跟你说了这多么，
number
可是，
关于虚数，你都了解些什么？
嗯……是平方值为－1的数……
就这些了！


你说什么？
就这么点儿？
$i^2=-1$
咔
就这种水平怎么配跟我交谈？
这样的话你就等着再补考吧！
啊！
不是的！
本来并不是想这么说，
可是……
咦？你还记得我啊？
啊
？
呵
呵
如果这样的话那就简单了！
用刚才那种方法我很快就能弄懂虚数了……
啪
你不教我了吗？
奇怪的家伙……
既然我这个“数学女王”都给你讲课了，你一定能学会！
那是当然！
哈


你刚才说到虚数是靠人的想象力创造出来的数，
那创造这么个数有什么意义呢？
嗯……从哪说起好呢？
我想，二次方程你总明白吧？
y
35
30
25
20
15
10
5
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
x
那么，还记得二次方程无解的情况吗？
就像这个烦人的图……
嗯……
曲线和 x 轴不相交，
所以 x 无解，
真不明白这个图哪里让人烦了？
中学的时候，我看到这个图后，
当时焦虑得夜不成寐！
无解，为什么呢？
那是因为你缺钙吧？
哈哈
可是如果使用虚数，
这个方程式就可以有解。
真的吗？
这就是虚数的作用！
是，是啊……
太厉害了！
不明白的话，不用勉强！

那么另一个例子，知道微分方程吧？
流汗
啊，啊……感觉还不错！
可不要不懂装懂。
$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$
计算电流值 i 的微分方程
吱
好难啊……
累了，呼……
快起来！
这本来需要用到高等数学的知识才能求解的，现在你只看看方程的形式就行了。
这个方程是用虚数和复数的形式表示的。
$R\dot{I}+j\omega L\dot{I}=\dot{V}$
计算电流值的代数方程式
$\dot{I}$ 和 $\dot{V}$ 是复数
j 是虚数
啊……
不用管符号的意思，只看它的形式就行了。
只有加减运算啊！
哇
是的！
即使是很复杂的方程，如果使用虚数和复数也能简便地计算出来。
$R\dot{I}+j\omega L\dot{I}=\dot{V}$
嘭
虚
很简单的式子哟！
特别是电压、电流，以及电波、声波等涉及“波”问题的方程。

原来如此啊！为此想象出了虚数……
imaginary number!
托冰室小姐的福，我现在知道虚数和复数的用处了！
如果不真正应用，而是仅仅满足于明白这些是没有用的。
这是使用虚数的学习路径。
学习复数的终极目标
复数的工学应用（在交流电路中，用复数 $\dot{V}$ 表示电压，用复数 $\dot{I}$ 表示电流，$\dot{V}$ 和 $\dot{I}$ 的关系用复数计算，可以很简单地求出解）
理解复数
欧拉公式
三角函数的加法法则
矩 阵
纳皮尔常数和圆周率 π
用极坐标表示复数平面
三角函数
虚数 i
数的种类
前路漫漫啊……
好了，虚数、复数的原理和用途都教给你了，要好好记住！
是，一定！


今天已经很晚了，
明天下课后请还来这里！
啊，明天吗？
你要是不愿意的话那就算了，我也很忙的！
喀
不，不！
我一定来！
那么，明天见！
说什么明天见，
反正我不会去的。
做得有些过头了吧……
唉
咔
忘了吧！

CHAPTER 01

第 1 章

数的种类


你没事吧，优太？
被“数学女王”折磨着了？
本来以为是谈“爱”，结果却被灌输了虚数的知识，不过倒是学到了不少。
想不到你还挺有毅力的啊！
好像传说被“女王”拖着讨论数学的人，
都会因过度害怕而变成石头！
冰室小姐是妖怪还是什么？
绝非危言耸听，那就是证据。
那是校长的铜像！
是吗？
校长也牺牲在“女王”的……
不，因为校长还活着！
哗哗
简直……
那么，我今后还要像昨天那样继续下去吗？
加油，千万不要变成石头哦！

数学系教研室
冰室研究室
味道不错
♪
味道不错
……
香草
冰淇淋
咣
你好！
你喜欢冰淇淋吗？
你怎么会来这儿？
哐哐
哐哐
不是冰室小姐说让我来的吗？
对不起，如果打扰的话我就回去了……
不过，我还想请教你几个问题。
嗯，既然来了再让你回去也不好……
继续昨天的学习吧！
分明很高兴却又说这样的话……

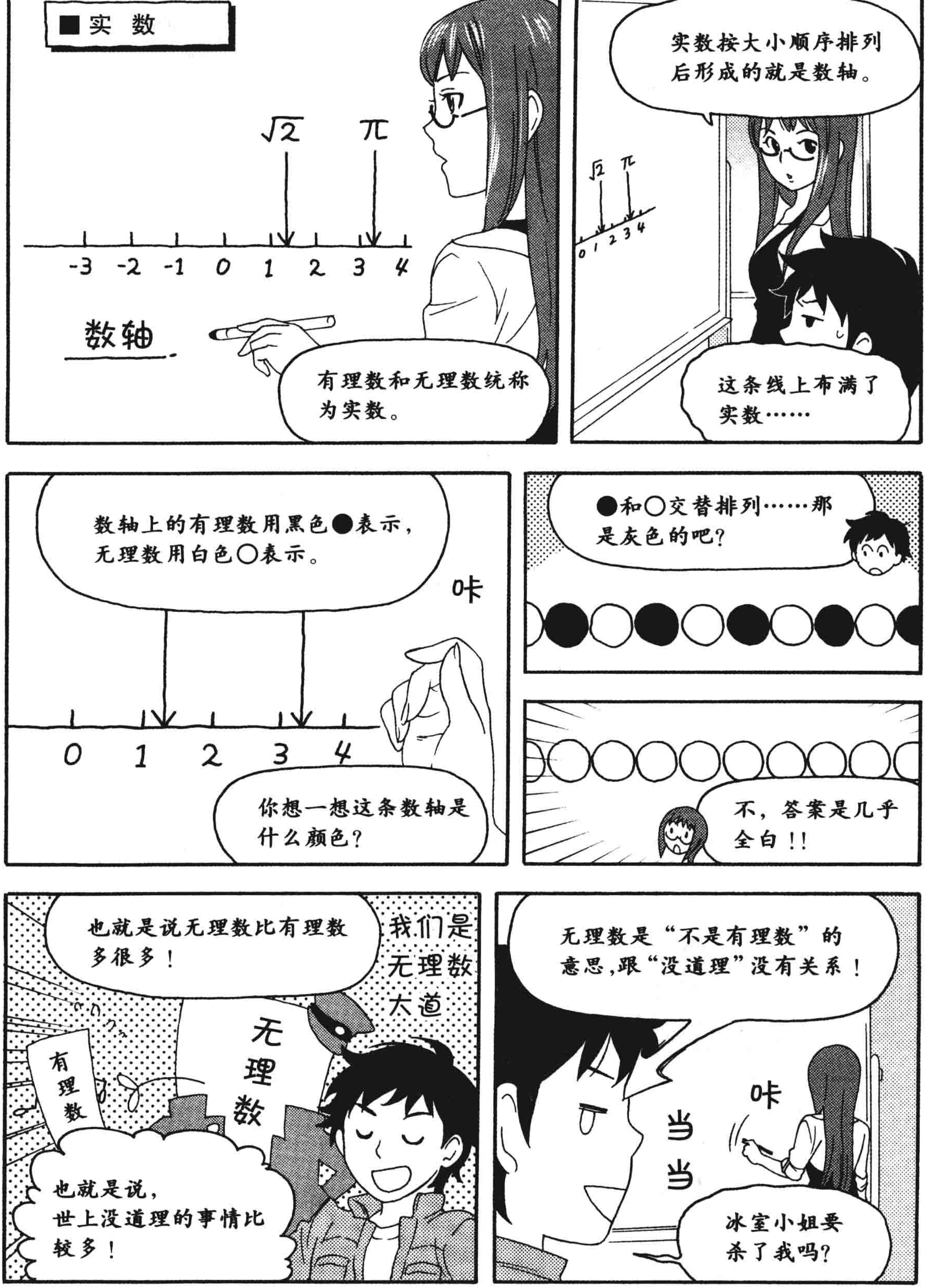
那么，你想问什么？
虚数 i
是比较基础的问题……
昨天以为明白了，可是并没有完全理解！
平方就是同一个数的乘法运算吧？
$i^2=-1$
是的！
数字有正的和负的，
明白了
是正数和负数。
吱
平方为负的数，我怎么也想不通。
正 × 正 = 正
负 × 负 = 正
？
因为那是在实数范围内考虑问题。
实
数
？
？
……
那么，我还是从基础中的基础开始教你吧！

1. 数分哪几类

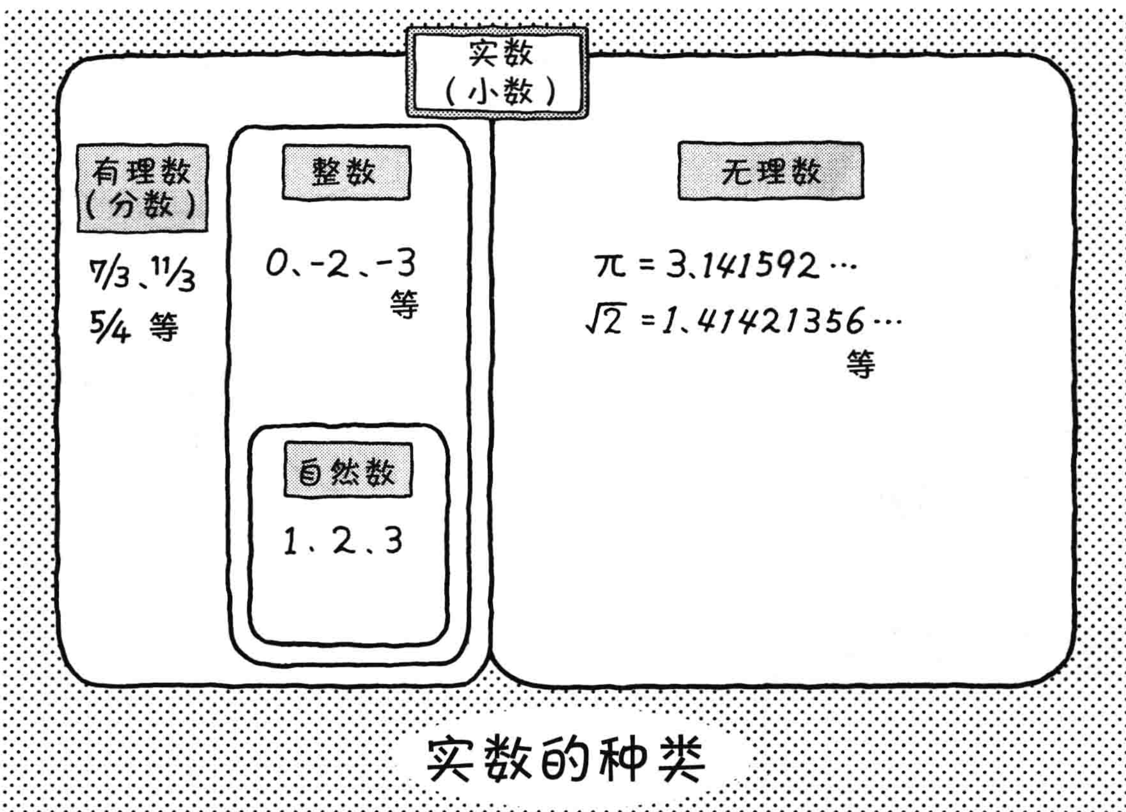
人类最初使用的数都是自然数，
冰淇淋
冰淇淋
冰淇淋
用于计算物品的数量。
■ 自然数和整数
就是 1,2,3，…嘛！
唉，要是只有自然数的话，就用不着这么辛苦了。
冰 淇 淋
喀喀
怎么能那样呢？
4−6=？
如果只使用自然数，那小数减大数就减不成了。
4+6 可以，
4−6 就不行，
我真想不通！
没有负数的世界会让人抓狂的！
为了解决这种问题，我们发明了负数。
现代数学大多把零也看做自然数，整数(integer)是零、自然数和负数的总称。
整数大家庭
『整数』首次闪亮登场
负数
0
自然数
我们和自然数组合在一起
是吗？
发明也好，扩展也好，
数是人类创造出来的，
它的使用者也是人类。
总之，
因为创造了整数，加减运算便畅通无阻了！


■ 小数和分数
自从有了整数，减法运算也没问题了，知道为什么吗？
因为
减法是加法的逆运算，整数之间进行
减法运算的话，答案也一定是整数。
没错！
理解得不错嘛！
可是只有整数的话，除法运算就麻烦了。
比如 1÷3，怎么办？
因为无法整除，所以用分数 1/3 表示，或者小数 0.333…
啊，好像是有点理解那种麻烦的感觉了。
是吗？
只用整数无法正确表示出除法运算的结果，
我们是“有理数”，请多关照！
整数 : 整数
像 1:3 这样用整数和整数之比表示的数叫做有理数。
另外，
像 0.333…这样无限循环下去的小数叫做循环小数。
这种循环小数一定可以表现为“整数 : 整数”的形式。
说明循环小数一定是有理数。


■ 无理数
有不能用整数表现的数吗？
这个问题问得好，那么……
1m
半径为 1m 的圆形池塘的面积怎么计算？
嗯，圆的面积是 πr^2，所以大约是 3.14m^2。
是啊！
到小数点后两位就结束了？我能记住圆周率小数点后 20 位左右的数字呢？
一个年级大概只有一个人，那样的人……
3.1415926535
897932384626
43383279
π 也是无限小数，但不是无限循环小数，
所以不能用整数之比表现。
我们是无理数！
π
√2
除了 π，还有 $\sqrt{2}$＝1.41421356…等，
这样的数称为无理数。

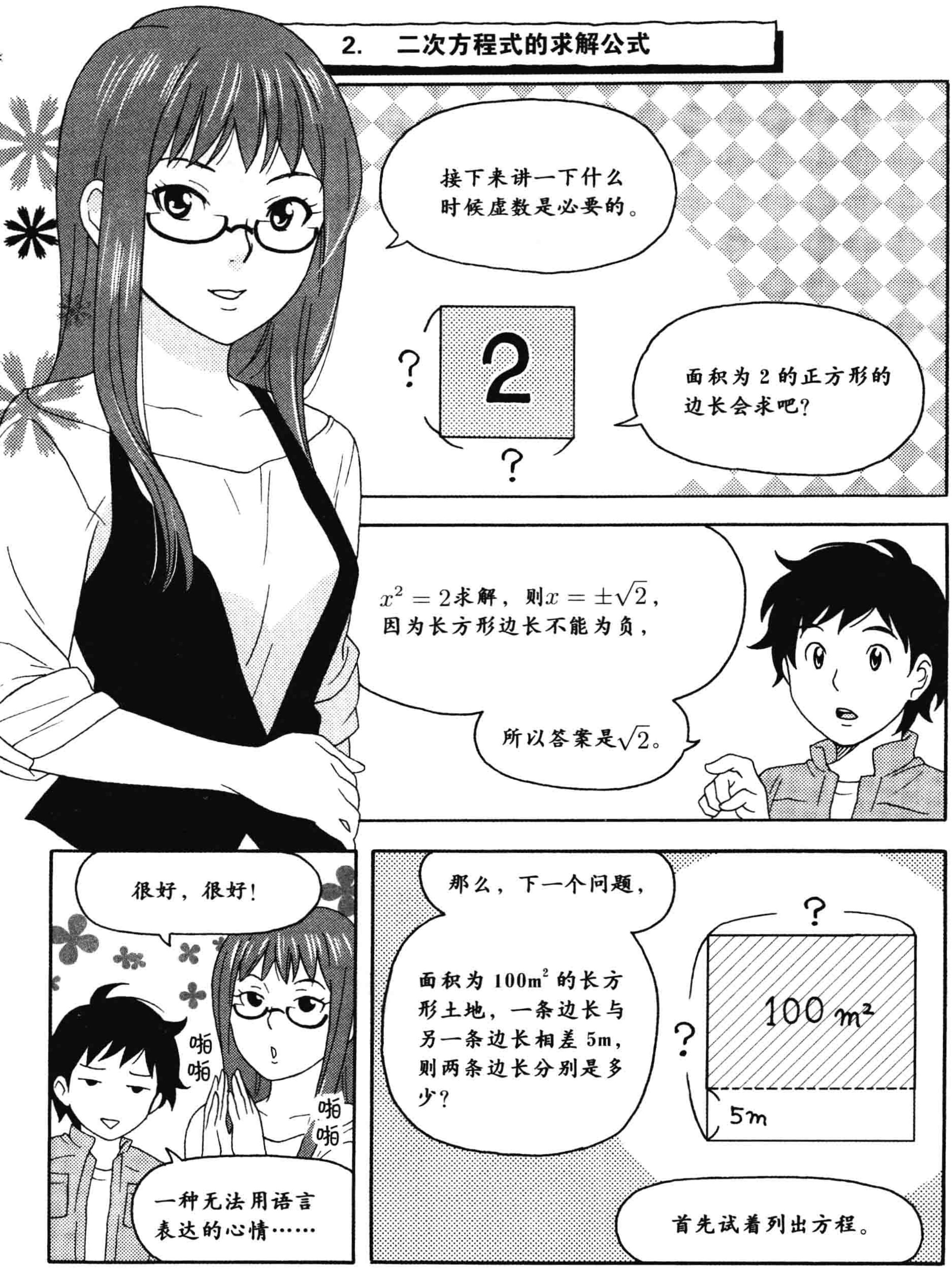

■实 数
$\sqrt{2}$
π
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
数轴
有理数和无理数统称为实数。
实数按大小顺序排列后形成的就是数轴。
$\sqrt{2}$ π
0 1 2 3 4
这条线上布满了实数……
数轴上的有理数用黑色●表示，无理数用白色○表示。
咔
0 1 2 3 4
你想一想这条数轴是什么颜色？
●和○交替排列……那是灰色的吧？
不，答案是几乎全白!!
也就是说无理数比有理数多很多！
我们是无理数大道
无理数
有理数
也就是说，世上没道理的事情比较多！
无理数是“不是有理数”的意思,跟“没道理”没有关系！
咔
当当
冰室小姐要杀了我吗？

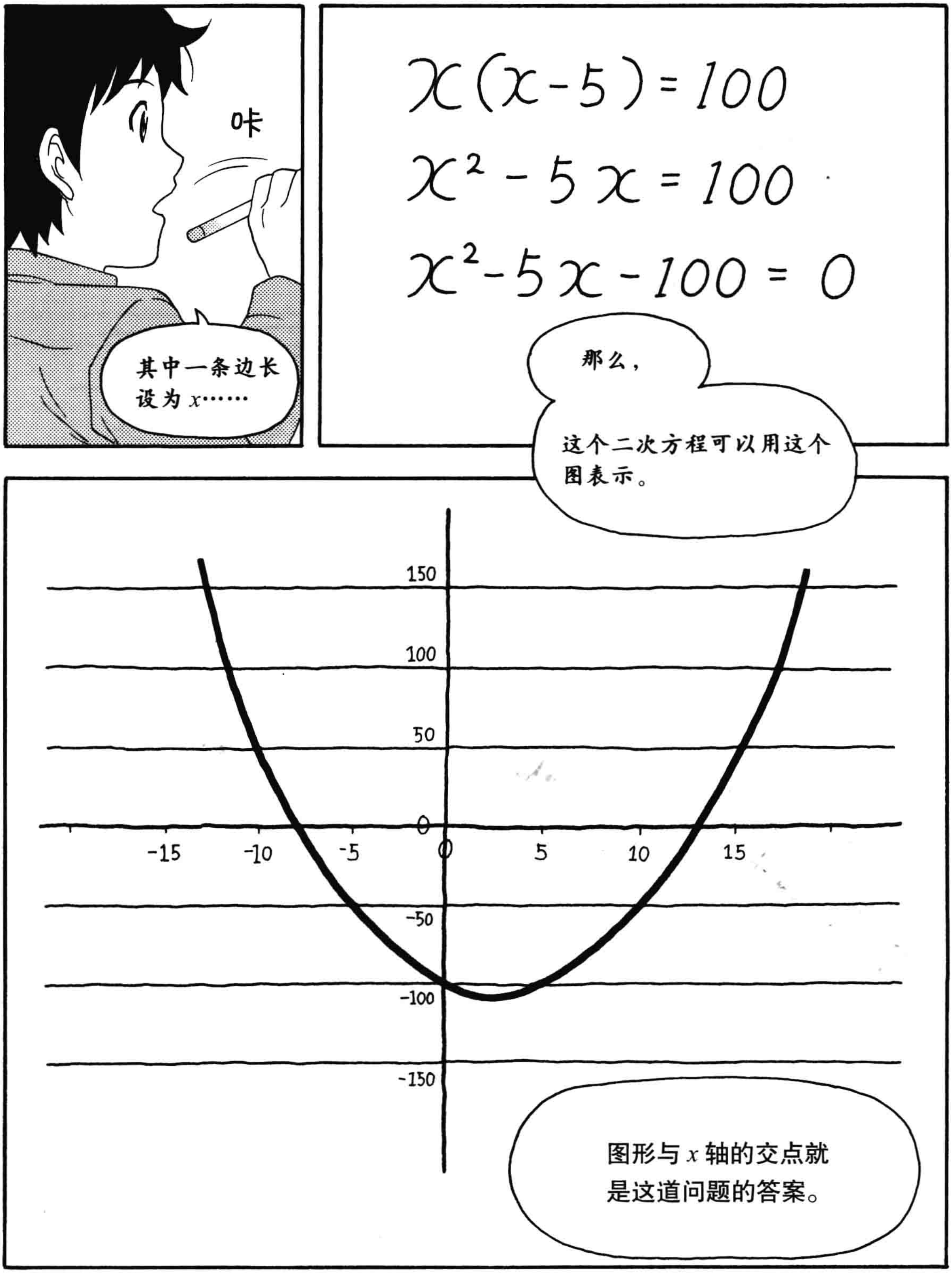

在这儿做一个总结。


实数
（小数）
有理数
（分数）
7/3、11/3
5/4 等
整数
0、-2、-3
等
自然数
1、2、3
无理数
π＝3.141592…
√2＝1.41421356…
等
实数的种类


刚才说的实数的范围就是这个图的范围吧？
是的，
虚数是不包含实数的数。

2. 二次方程式的求解公式



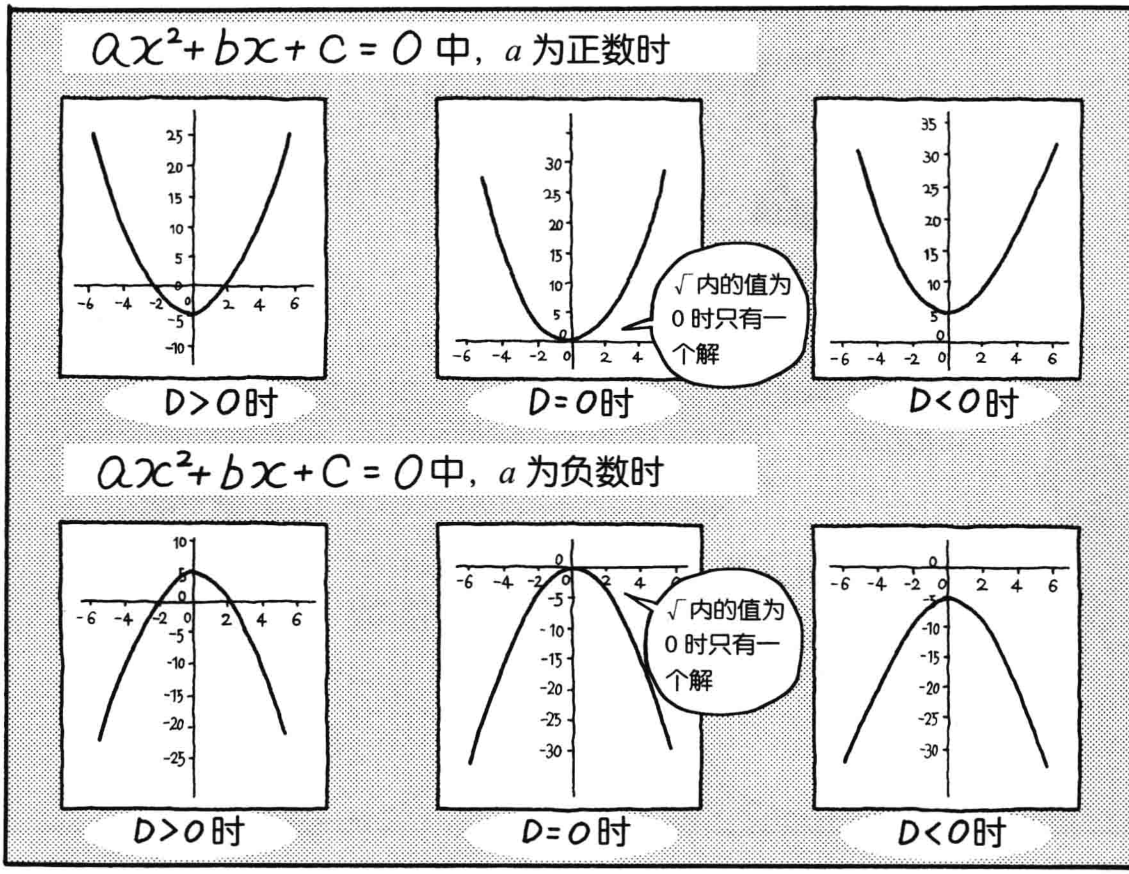

咔
其中一条边长设为 x……
$x(x-5)=100$
$x^2-5x=100$
$x^2-5x-100=0$
那么，
这个二次方程可以用这个图表示。
150
100
50
0
-15
-10
-5
0
5
10
15
-50
-100
-150
图形与 x 轴的交点就是这道问题的答案。


二次方程的求解
公式还记得吗？
二次方程
$ax^2+bx+c=0$ 的解
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
咔
……
a、b、c 无论是什么数，
只要代入这个公式，就可
以求出方程的解。
分母不能为0，以前学过的。
a 不能为 0 吧？
a 为 0 的话，就变成一次方程了，
我说的是二次方程！
多余的东西倒是记得
对不起！
唉
呜呜，
自寻烦恼。

那么，用这个公式计算
刚才长方形土地的面积。
是
二次方程
$ax^2+bx+c=0$时
把a=1、b=-5、c=-100代入
$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-100)}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25+400}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{425}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25\times17}}{2}=\frac{5\pm5\sqrt{17}}{2}$
x的值为 −7.808
或 12.808，
咔
咔
因为边长不能为负，
所以答案是 12.808。
两个值的乘积约
等于 100m²。
12.808 m
(12.808−5)
=7.808 m
验算也很漂亮。

就要正式开始了哦！
唰
唰
刚才是有解的二次方程，也存在无解的情况。
冰室小姐真是容易焦虑的人啊。
判断是否有解的判别式 D 如果为负
咔嗒
那么，方程就无解。
判别式 $D=b^2-4ac<0$ 时，
无解
D 是 discriminant（判别）一词的首字母。
D 是求解公式的核心部分。
这里的负数意味着平方值为负。
平方为负……
就是说虚数要在这里出现了！
STOP
不要着急，
先看看图吧！


咔
二次方程的图形根据 a 值的正负不同而有开口向上或向下两种情况，分别画出两行。

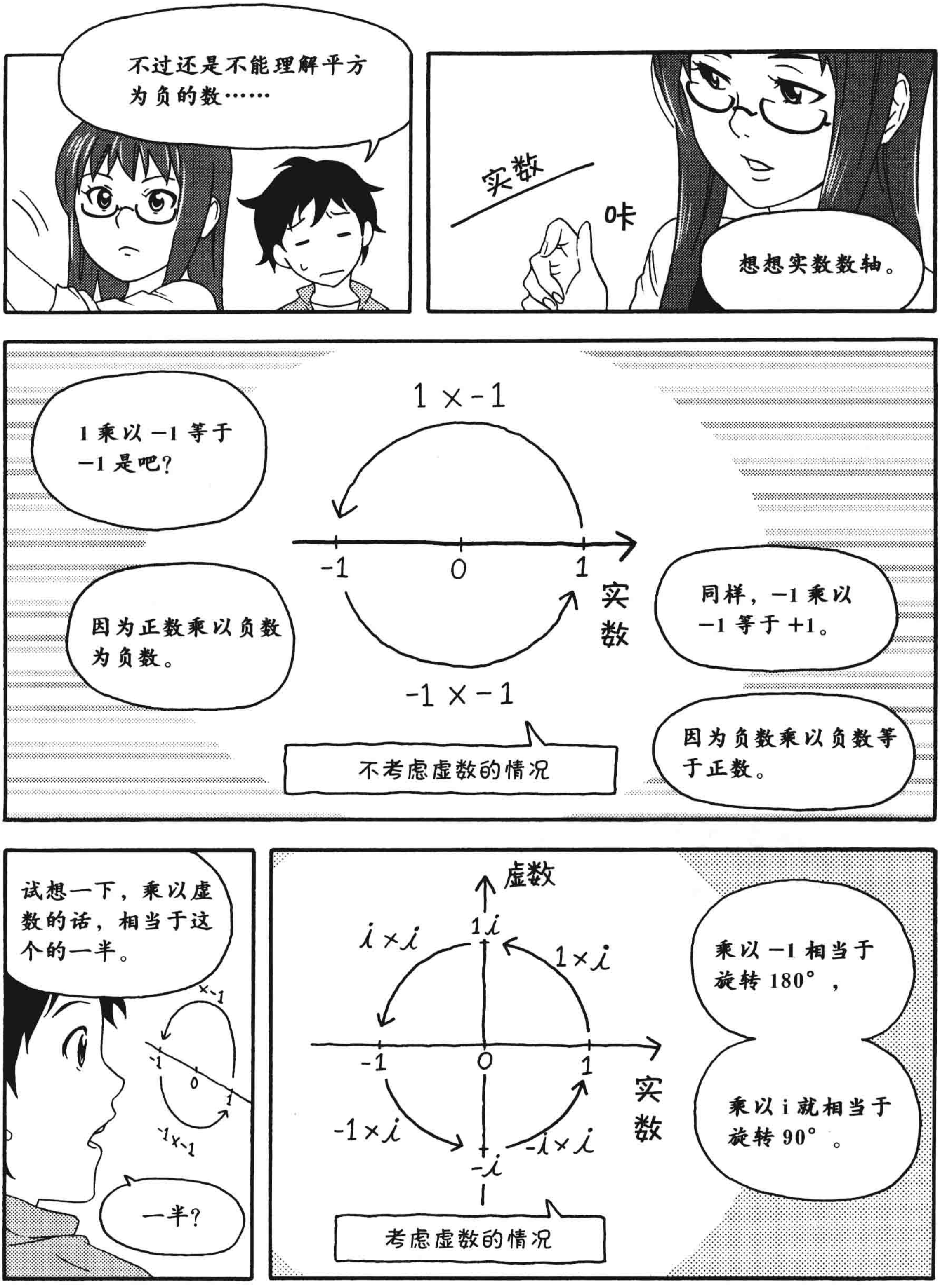

$ax^2+bx+c=0$ 中，a 为正数时
√ 内的值为 0 时只有一个解
D>0时
D=0时
D<0时
$ax^2+bx+c=0$ 中，a 为负数时
√ 内的值为 0 时只有一个解
D>0时
D=0时
D<0时


不管开口向上还是向下，当 $D<0$ 时，图形和 x 轴都没有交点。
这是无解的图形。


无解的结果是什么呢？

3. 引入虚数 *i* 使得所有的二次方程都有解

$i^2=-1$，所以 $i=\pm\sqrt{-1}$。
不过如果限定 $i=\sqrt{-1}$，那么$-\sqrt{-1}=-i$。
本书统一限定 $i=\sqrt{-1}$。



不过还是不能理解平方为负的数……
实数
咔
想想实数数轴。
1 乘以 −1 等于 −1 是吧？
1 × −1
-1
0
1
实数
-1 × −1
因为正数乘以负数为负数。
同样，−1 乘以 −1 等于 +1。
因为负数乘以负数等于正数。
不考虑虚数的情况
试想一下，乘以虚数的话，相当于这个的一半。
×-1
-1
0
1
-1×-1
一半？
虚数
1i
i × i
1 × i
-1
0
1
实数
-1 × i
-i × i
-i
乘以 −1 相当于旋转 180°，
乘以 i 就相当于旋转 90°。
考虑虚数的情况

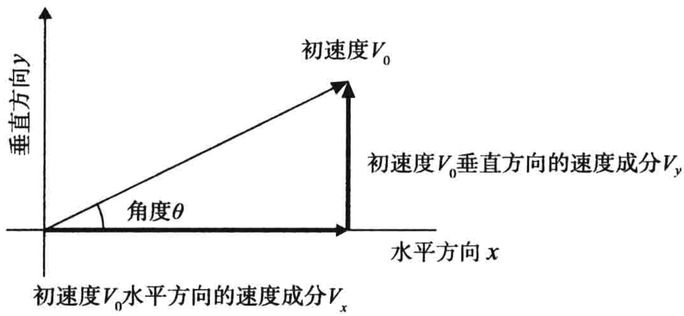

怎么想好呢？
总觉得好像能抓住……
!?
噼啪
你说的是什么怪话?!
骨碌
骨碌
这个旋转非常重要！
旋转也就是一种周期性的现象，世界上有很多。
水波、声波、电磁波、交流电……
这种现象用数学方法表达起来会很麻烦。
可是，如果使用虚数就能够变成很简单的形式。
噼啪
噼啪
问题变得容易解决了。
虚数也许很厉害……

骨碌
骨碌
骨碌
骨碌
骨碌
对不起……
那么，今天就到这里吧。
嗯，那个……
我知道有家很好吃的拉面店，一起去，怎么样？
我很忙的，我可没那个时间！
肚子饿了，可是没去过那种地方……
是吗……
咔嗒
咔嗒
稍等一下！
咔嗒
咔嗒
后面是公用冰箱吗？
嘭
Big!
苏打饼干
冰淇淋
咔哒
香草冰淇淋
给你，礼物。

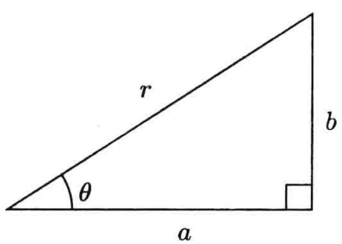

非常非常感谢！
冰室研究室的老大冰室小姐……
这么说起来，我好像还没问过你的名字……
啊，我叫优太，
樱井优太！
你还是第一个能把我的讲义拿走两天的人呢！
论文资料①
啪嗒
加油哦！优太。
资料①
难道师兄说的会变成石头是另外一种意思……
哈
哈
优太，你怎么了？

4. 二次方程的应用举例

关于二次方程式的应用，我们用下面这一例子来进行分析说明，即当从某一地点向外投球时，如果投掷角度是 θ，那么请求出球体的着陆点。首先，假设球体的速度是 V_0，那么上述题意可如下图所示。此时忽视空气阻力。



当球体以初速度 V_0 被发射出去时，关于作用于球体的力，如果假设垂直方向的上方向为正，那么向下方向作用的力只有重力加速度 g。因此，球体在水平方向上是等速运动。此时，因为与水平方向的夹角是 θ，所以球体的速度就被分成了垂直方向的速度成分和水平方向的速度成分。此时就可以运用三角函数了。



接下来我们复习三角函数的知识。如上图所示，假设右下角是直角的三角形的底边为 a，高为 b，那么根据勾股定理（毕达哥拉斯定理）可知，斜边 $r=\sqrt{a^2+b^2}$。根据三角形的相似条件“如果有两组角度相同则两个三角形相似”可知，两个直角三角形除了直角之外如果还有一个角度相等，那么这两个直角三角形相似。因为是相似三角形，所以边长的比相同。

在此，我们对三角函数进行如下定义。所谓函数，就是代入某个数值后，计算得出的数值能够复原的一种便利的工具。

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

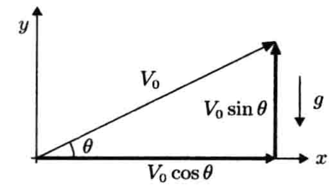
式中，cos表示余弦；sin表示正弦；tan表示正切。

大学数学中，据说自从三角函数出现以后，很多人开始讨厌数学，这是因为工科院系所分析的现象中，很多是呈周期性变化的缘故。因此，三角函数出现得也就比较频繁。

言归正传，利用三角函数来分析上述这种情况，因为与水平方向的夹角是 θ，所以，以初速度 V_0 被投掷出去的球体的垂直方向的速度成分 V_y 和水平方向的速度成分 V_x 可以用时间 t 表示如下。

$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta$$

$$V_x = V_0 \cos\theta$$



对时间 t 进行积分，那么 y 方向和 x 方向上所得出的结果如下。

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta t + y_0$$

$$x = V_0 \cos\theta t + x_0$$

x_0 和 y_0 分别是 x 方向（水平方向）和 y 方向（垂直方向）上当时间 t=0 时的值，被称作初期值。作为例题，在此我们假设初速度 V_0 是 30m/s(时速是 108km/h)，θ=30° ，x_0=0，y_0=10m, 然后计算具体的数值。我们通过分析可知，这道例题可以理解为在海拔为 10m 的高度上向与水平方向呈 30° 夹角的方向投掷球体，需要求出球体的着陆点。因为在着陆点上，y=0m，而重力加速度 g=9.8m/s^2，代入 y 的计算公式可得

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 + 30 \times \sin 30^\circ \times t + 10 \\
0 &= -4.9t^2 + 30 \times \frac{1}{2}t + 10 \\
0 &= -4.9t^2 + 15t + 10
\end{aligned}$$

利用求解公式解答上述方程式可得着陆时间 t 为

$$\begin{aligned}
t &= \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times (-4.9) \times 10}}{2 \times (-4.9)} \\
&= \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 196}}{-9.8} \\
&= \frac{-15 \pm 20.52}{-9.8} \\
&= -0.56 \text{或} 3.62
\end{aligned}$$

因为时间 t 不可能为负数，所以，根据题意可知经过 3.62s 后球体就会落地。然后，分别将 $V_0=30$，$\theta=30°$ ，$t=3.62$，$x_0=0$ 代入 $x=V_0\cos\theta t+x_0$，计算可得

$$\begin{aligned} x &= V_0\cos\theta\, t + x_0 \\ &= 30\cos 30°\times 3.62 + 0 \\ &= 30\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3.62 \\ &\approx 93.79 \end{aligned}$$

由此可见，球体在距离投掷地点 93.79m 的地方落地。

另外，在这个世界上，存在很多种呈周期性变化的现象，如交流电的电压和电流、电波、声音，等等。要想把这些呈周期性变化的现象表现出来，三角函数是一个非常便利的工具。那些打算报考理科院校的高中生们，希望你们不要以自己的好恶来对待三角函数，一定要努力熟练掌握三角函数的应用。还有那些已经升入理工院系却依然因三角函数而苦恼的大学生们，你们也一定要继续好好学习三角函数的相关知识。

5. 二次方程式求解公式的推导方法

接下来我们解释说明二次方程式求解公式的推导方法。

首先把二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 两边同时除以 a。此时，a 不等于零是前提条件。在数学世界中，不能进行除以 0 的计算。因为任何数字乘以 0 之后都是 0，所以，如果 3 除以 0 之后再乘以 0 的话，那么$\frac{3}{0}\times 0=3$ 或者等于 0，这两种可能性都是存在的，而在数学世界里，绝对不允许有这种模糊不清的计算存在。因此，不能除以 0。言归正传，

方程式两边同时除以 a 后可得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，因为需要一个括号的平方的形式，所以将 $\frac{c}{a}$ 移项到等式的右边，然后，等式的两边同时加上 x 的系数$\frac{b}{a}$的一半的平方 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，计算可得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

因为 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$, 所以上述算式可变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

通过上述算式可知，等式左边括号中算式的平方值等于右边的算式，所以，等式两边同时求平方根的话，因为负数的平方也是正数，所以，通过计算可得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\qquad \text{变成}$$

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\\
&= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\\
&= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
&= -\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\\
&= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

综上所述,这样就求出了二次方程式的求解公式。即便忘记了二次方程式的求解公式,也可以通过这种方法进行推导。

另外，当 b 是偶数时，假设$b'=\frac{b}{2}$，那么 $b=2b'$，所以

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}\\
&= \frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}
\end{aligned}$$

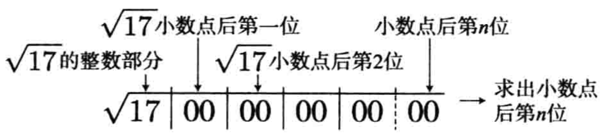
这样便能够减少计算量。

6. 平方根的笔算方法

已知长方形土地的一边边长比另一边边长短 5m，且面积为 100m^2，请求出长方形土地的边长。这一问题的答案中会出现一个数字$\sqrt{17}$。利用电子计算器很快就能计算出$\sqrt{17}$的数值，然而，在参加大学的入学考试时，多数情况下都不允许使用电子计算器。但是，只要能够求出大概的数值，也会被认定是正确答案。因此，接下来我们就来解释说明如何用笔算快速计算得出$\sqrt{17}$的数值。

① 把根号下的数字以小数点为标准，每两位一组进行分组。

$\sqrt{17}$的话，则看作 17 00 00 00。

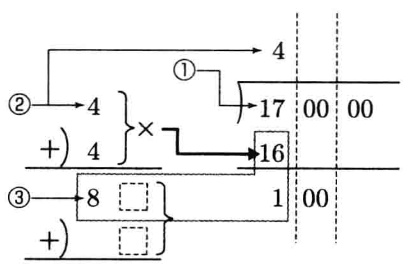


② 求出不大于每两位一组数字中最左边那组数字的最大整数平方根。

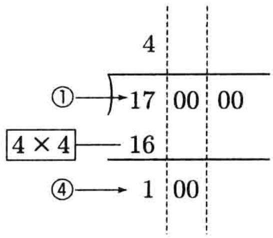
因为 5^2=25，4^2=16，所以不大于 17 这个数字的最大整数平方根是 4。如下图所示，把 4 写到 17 的上面，在左侧，写一个 4 之后，在其正下方再写一个 4。

③ 把 4×4=16 写到 17 的正下方，计算 17−16=1，然后把这个计算结果写在 16 的正下方。

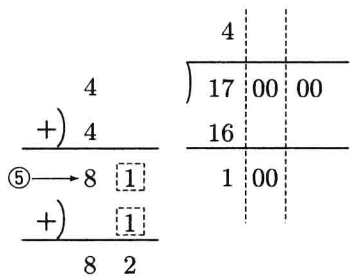
计算 4+4=8，然后把这个计算结果写在 4 的正下方。



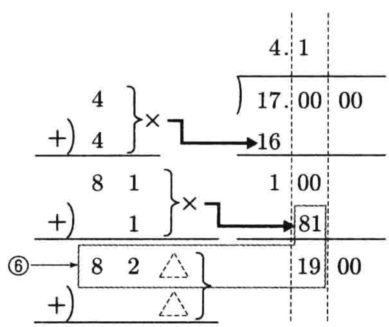
④ 在 17−16=1 的结果的右侧，把上面的两位落下来写上，结果就变成了 100。



⑤ 计算 8□ × □的值，并求出其计算结果不超过 100 的□的整数值。如果□的数字是 2，那么 8[2] × [2]=164，因为这个计算结果超过了 100，所以□中的数字只能是 1。在上面平方根的位置写上 1，请注意小数点的位置。

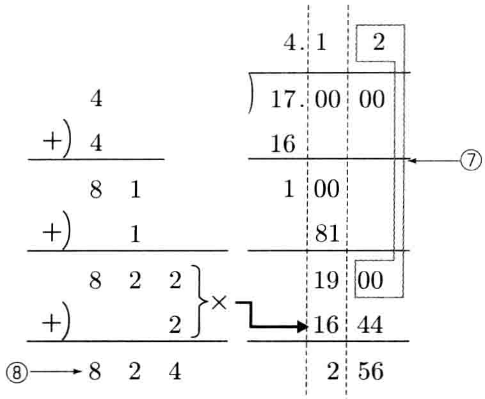


⑥ 把 8[1] × [1]=81 的计算结果写在 100 的下方，进行减法计算可得 19，然后将这个计算结果写在正下方。在左侧，写上 8[1]+[1]=82 的计算结果。



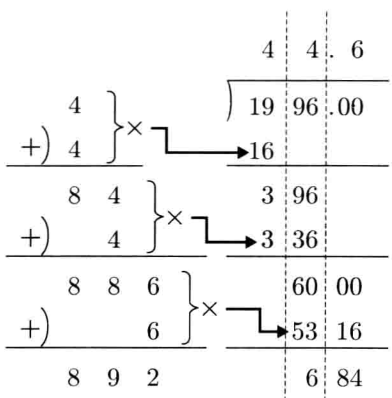
⑦ 在 19 的右侧把上面的两位落下来写上，结果就变成了 1900。计算 82△ × △的值，并求出其计算结果不超过 1900 的△的最大整数值。因为 822 × 2=1644，823 × 3=2469，所以△中的数字应该是 2。在平方根的部分写上 2，结果就变成了 4.12。

⑧ 把 822×2=1644 的计算结果写在 1900 下方，把 822+2=824 的计算结果也写上。



然后重复上述计算过程。

下图是利用同样的计算方法计算 $\sqrt{1996}$ 的数值的计算过程。



CHAPTER 02

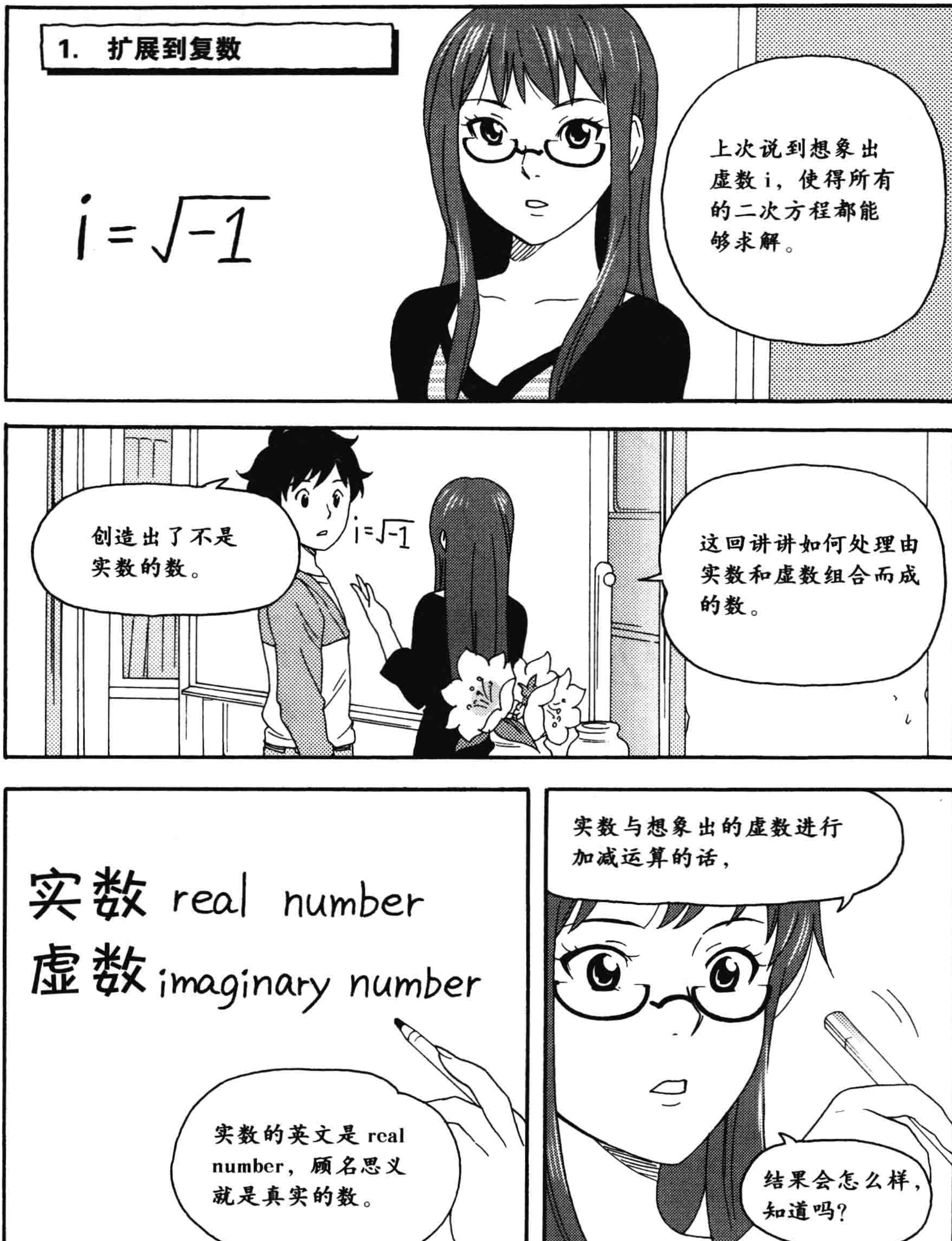
第2章

从虚数 i 扩展到复数 $a+bi$


唰唰
唰唰
啪啦
今天讲些什么呢?
滴答
滴答
为什么
还不来……
吱!
你好!


嘭
你迟到了！
明明很高兴……
对不起！！
咦？
这是什么？
这是我送你的花……
就是为了买这个所以稍微晚了会儿。
原来因为这个迟到了……
啊啊啊啊……
我刚才太过分了，太过分了啊！
师兄的建议果然有效啊！
对……不起……
无论什么女人都会被花打动！

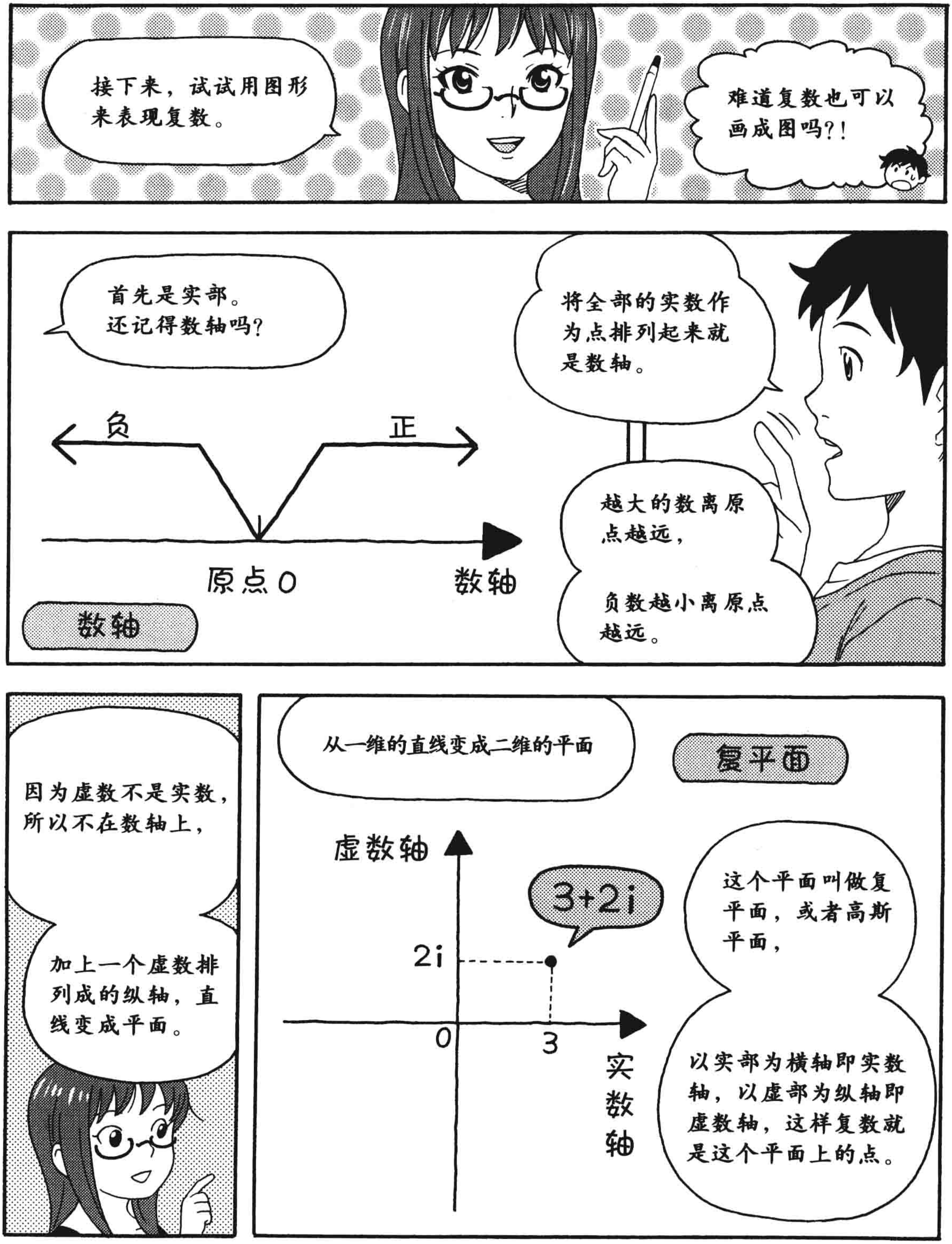
喝吧！
啪
心可神怡般美味
大麦茶
因为房间里没有花瓶。
咕咚
咕咚
咕
咚
咕
咚
惩罚游戏？！
味道怎么样？
心可神
一种说不上来的味道。
打嗝
怎么，不好喝吗？
好像要吐……
这个对身体有好处啊！
啪
我每天都喝的。
打嗝
那么，继续开始吧！
咕咚
咕咚
咕咚
咕咚
咕咚
既然冰室小姐喝的话，我不是没必要喝了嘛……
大麦

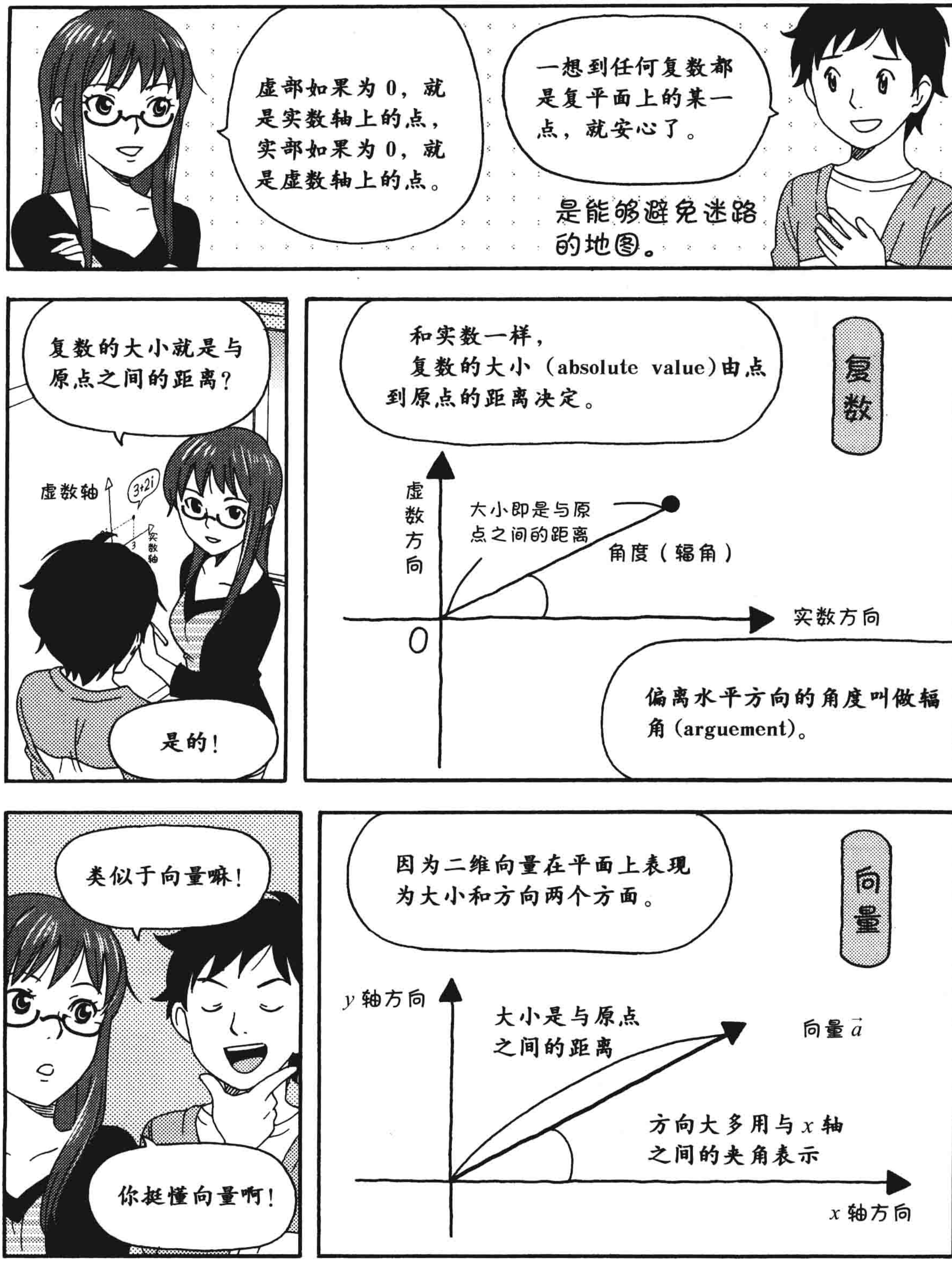

1. 扩展到复数
$i=\sqrt{-1}$
上次说到想象出虚数 i，使得所有的二次方程都能够求解。
创造出了不是实数的数。
$i=\sqrt{-1}$
这回讲讲如何处理由实数和虚数组合而成的数。
实数 real number
虚数 imaginary number
实数的英文是 real number，顾名思义就是真实的数。
实数与想象出的虚数进行加减运算的话，
结果会怎么样，知道吗？


2+i=？
比如实数 2 和 i 相加，怎么加呢？
真实的实数和想象的虚数相加的话，会是什么样呢……
嗯
单看这个算式一步也进行不下去啊！
说的没错，
所以 2 和 i 相加，就这样保留算式表示成 2+i，
2i
3i
2+i
3-i
减法运算也同样，3 减 i 就表示成 3−i。
原来如此！
接下来是乘法运算。
3×i=3i
想表现有几个 i，如果 3 个就是 3i，4 个就是 4i。
除法运算也一样
i 的一半就是 1/2 i，
i
i
i
3i
i
1/2 i
这个很容易记。

2+i
复数
complex number
用实数＋虚数的形式表示的数就叫做复数(complex number),
意思是实数和虚数组合而成的数(complex就是复合、合成的意思)。
实数
虚数
复数
2+i
实数+虚数
实数部分称为实部(real part),虚数部分除了i以外的数字称为虚部(imaginary part)。
比如2+i，实部为2，虚部为1。
实数
2+i(1i)
虚数
那么−7−2i的实部和虚部呢?
嗯……实部是−7，虚部是−2。
实数
−7 −2 i
虚数
正确!
这样复数的表示方法就很清楚了。

2. 复数的性质（大小、偏角）和复数平面



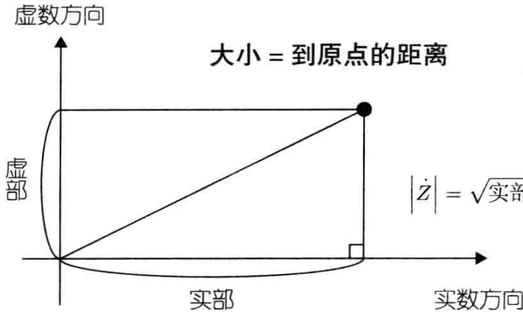

虚部如果为 0，就是实数轴上的点，实部如果为 0，就是虚数轴上的点。
一想到任何复数都是复平面上的某一点，就安心了。
是能够避免迷路的地图。
复数的大小就是与原点之间的距离？
虚数轴
3+2i
实数轴
3
是的！
复数
和实数一样，
复数的大小（absolute value）由点到原点的距离决定。
虚数方向
大小即是与原点之间的距离
角度（辐角）
实数方向
0
偏离水平方向的角度叫做辐角（arguement）。
类似于向量嘛！
你挺懂向量啊！
向量
因为二维向量在平面上表现为大小和方向两个方面。
y 轴方向
大小是与原点之间的距离
向量 $\vec{a}$
方向大多用与 x 轴之间的夹角表示
x 轴方向


那么，能告诉我复数的大小和辐角的计算方法吗？
明白向量的话就很简单哟！
向量也不太明白！
跟虚数一样
意料之中！
那么，先讲讲复数的几个规则。
意料之中啊？……
复数的表示方法
Ż
Ż为斜体，表示Ż是复数，
而不是其他的量。
Re(Ż) 或者 re(Ż) 表示复数 Ż 的实部
实数 real number 的打头字母。
Im(Ż) 或者 I(Ż) 表示复数 Ż 的虚部
这是由虚数的单词 imaginary number 引申而来的。
接下来讲讲复数的大小和辐角的计算方法。

■ 大小的计算方法

复数 $\dot{Z}$ 的大小用 $|\dot{Z}|$ 表示

$$\left|\dot{Z}\right| = \sqrt{实部^2+虚部^2} = \sqrt{\left[\mathrm{Re}(\dot{Z})\right]^2+\left[\mathrm{Im}(\dot{Z})\right]^2}$$



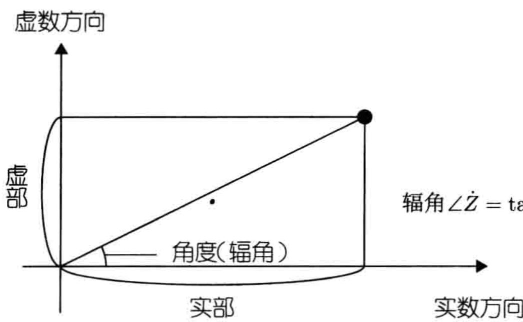
$$\left|\dot{Z}\right| = \sqrt{实部^2+虚部^2} = \sqrt{\left[\mathrm{Re}(\dot{Z})\right]^2+\left[\mathrm{Im}(\dot{Z})\right]^2}$$

复数的大小是到原点的距离，也就是直角三角形的斜边长，用勾股定理可以求出。

■ 辐角的计算方法

复数 $\dot{Z}$ 的辐角，用 $\angle\dot{Z}$ 表示

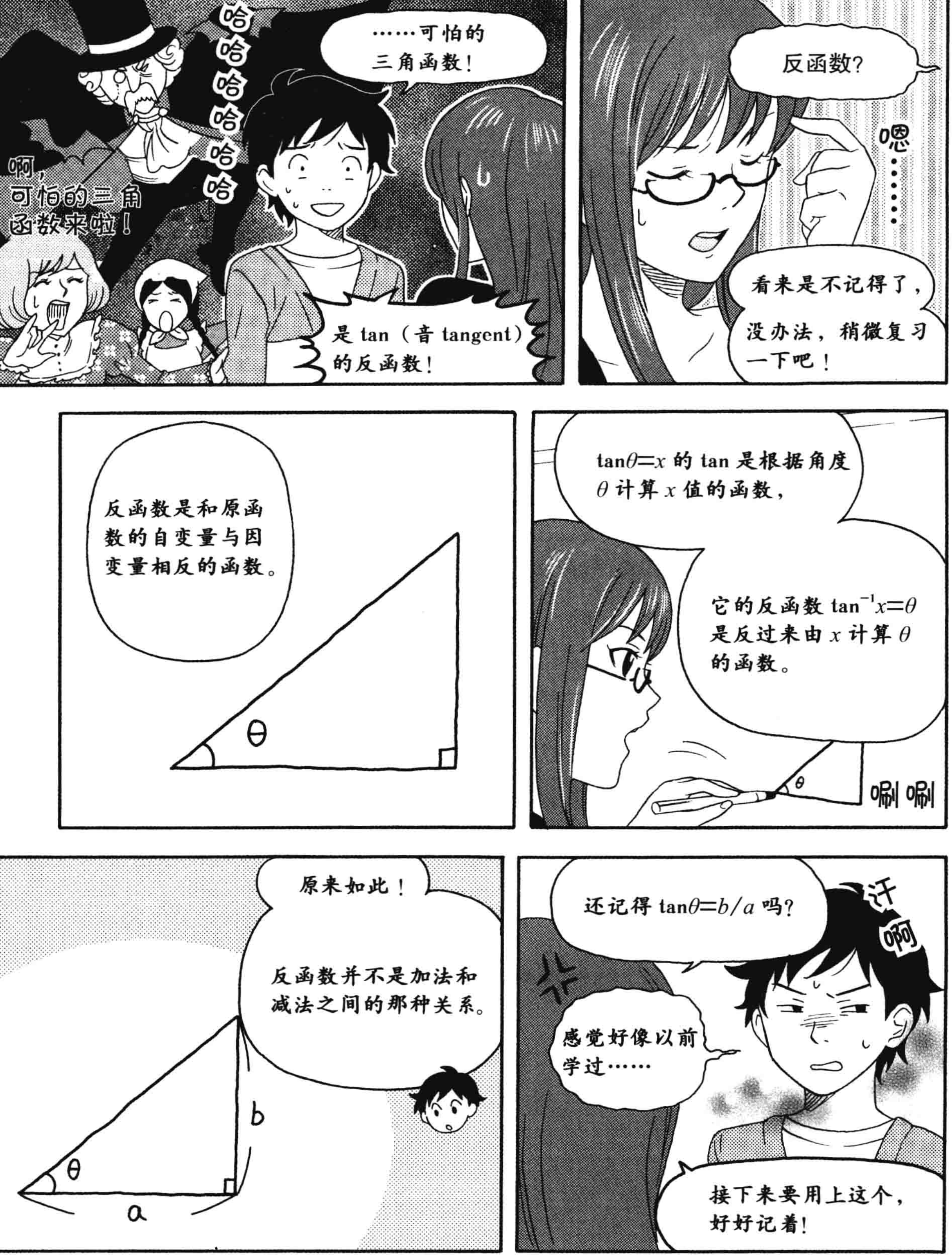
$$\angle\dot{Z} = \tan^{-1}\left(\frac{虚部}{实部}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\dot{Z}\right)}{\mathrm{Re}\left(\dot{Z}\right)}\right)$$

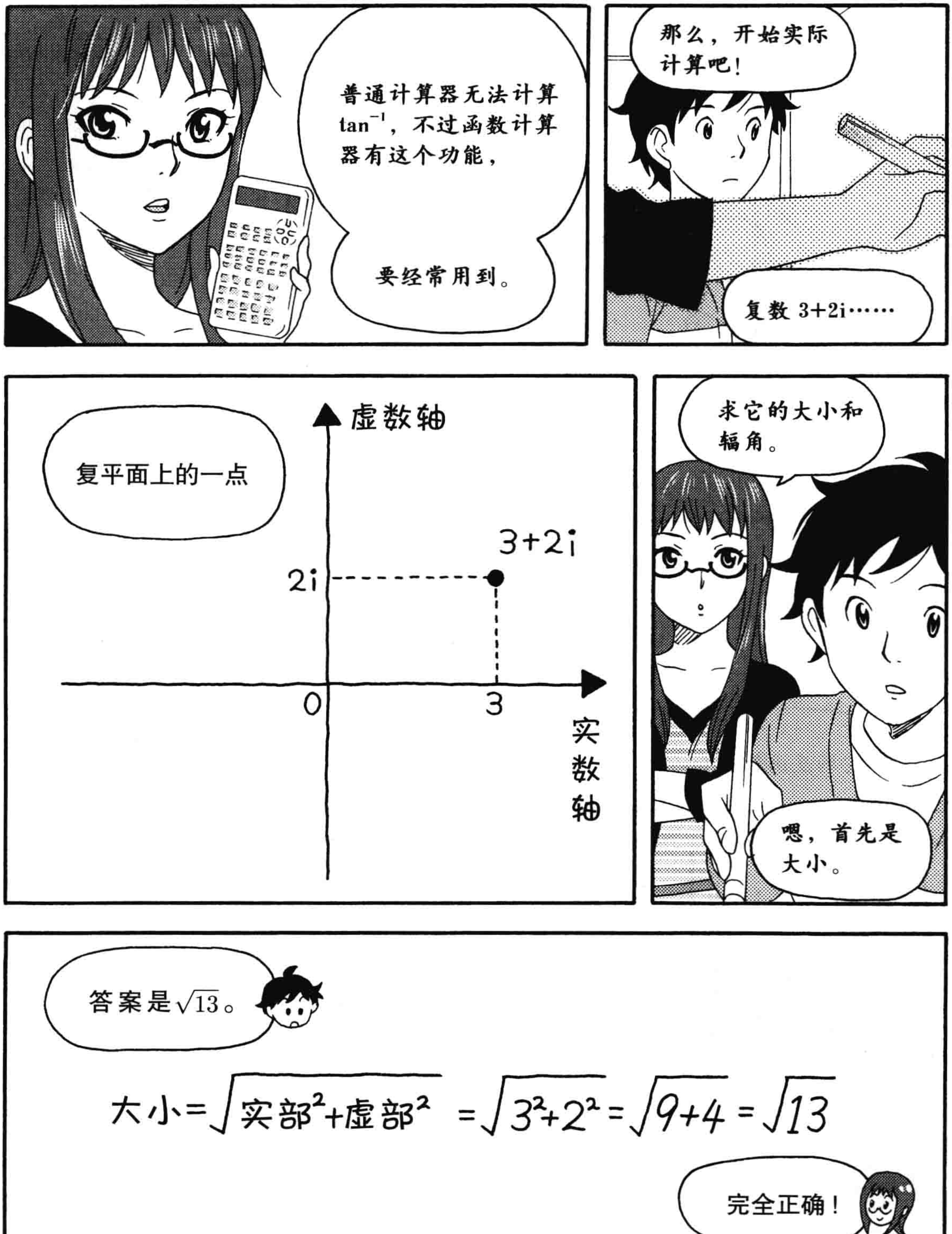


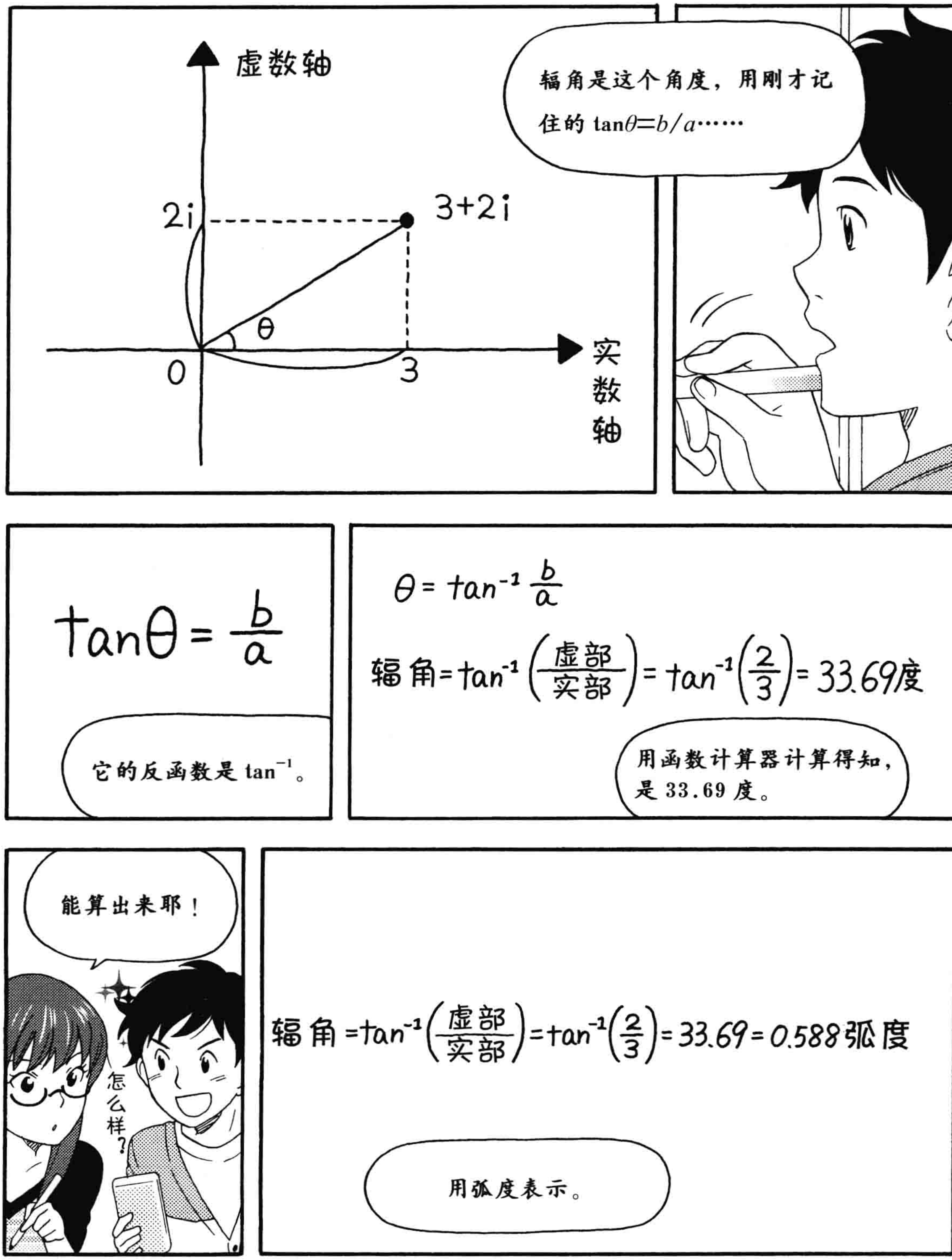
辐角 $\angle\dot{Z} = \tan^{-1}\left(\frac{虚部}{实部}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\dot{Z}\right)}{\mathrm{Re}\left(\dot{Z}\right)}\right)$

tan 的 −1 次幂是什么?

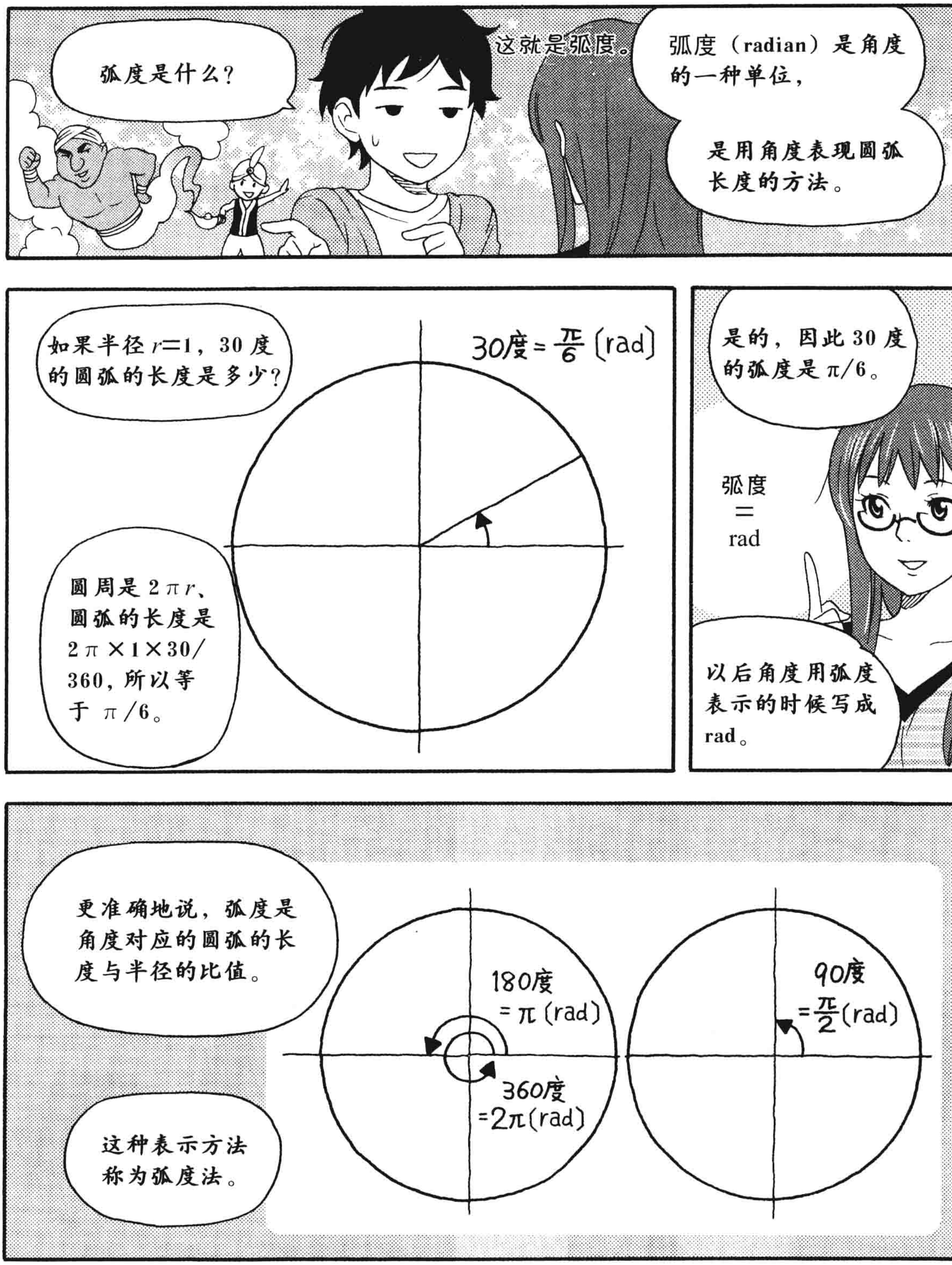
$\tan^{-1}$ 就是 arctan。


……可怕的
三角函数！
哈哈哈哈哈哈哈
啊，可怕的三角函数来啦！
是 tan（音 tangent）的反函数！
反函数?
嗯……
看来是不记得了，
没办法，稍微复习一下吧！
反函数是和原函数的自变量与因变量相反的函数。
θ
tanθ=x 的 tan 是根据角度 θ 计算 x 值的函数，
它的反函数 tan⁻¹x=θ 是反过来由 x 计算 θ 的函数。
θ
唰唰
原来如此！
反函数并不是加法和减法之间的那种关系。
b
θ
a
还记得 tanθ=b/a 吗?
汗
啊
感觉好像以前学过……
接下来要用上这个，好好记着！

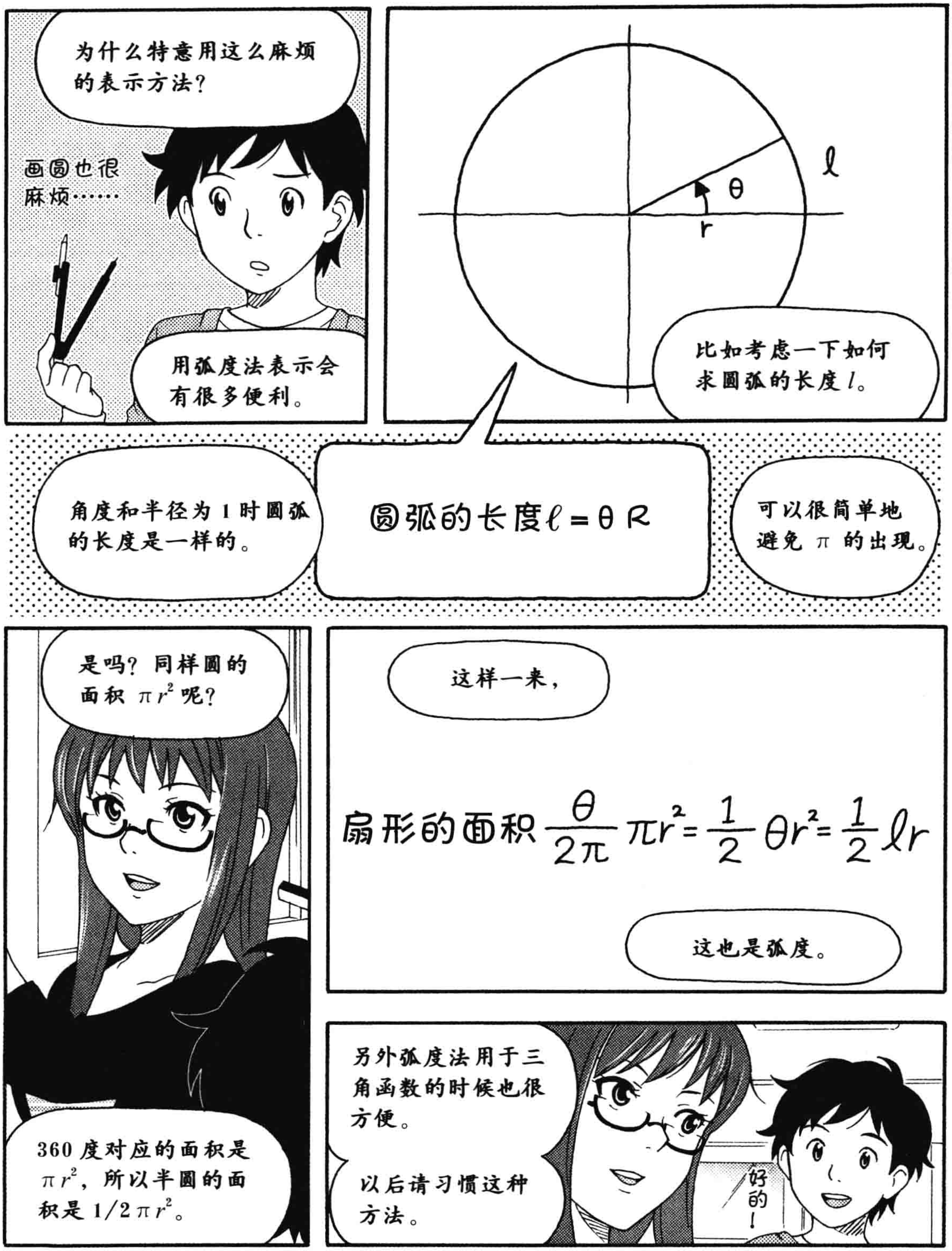

普通计算器无法计算$\tan^{-1}$，不过函数计算器有这个功能，
要经常用到。
那么，开始实际计算吧！
复数 3+2i……
复平面上的一点
虚数轴
3+2i
2i
0
3
实数轴
求它的大小和辐角。
嗯，首先是大小。
答案是$\sqrt{13}$。
$$大小=\sqrt{实部^2+虚部^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$
完全正确！



虚数轴
2i
3+2i
θ
0
3
实数轴
辐角是这个角度，用刚才记住的 $\tan\theta = b/a$……
$\tan\theta = \frac{b}{a}$
它的反函数是 $\tan^{-1}$。
$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$
辐角 $= \tan^{-1}\left(\frac{虚部}{实部}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69$度
用函数计算器计算得知，是 33.69 度。
能算出来耶！
怎么样？
辐角 $= \tan^{-1}\left(\frac{虚部}{实部}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69 = 0.588$弧度
用弧度表示。



弧度是什么？
这就是弧度。
弧度（radian）是角度的一种单位，
是用角度表现圆弧长度的方法。
如果半径$r=1$，30度的圆弧的长度是多少？
30度＝$\frac{\pi}{6}$(rad)
圆周是$2\pi r$、圆弧的长度是$2\pi\times1\times30/360$，所以等于$\pi/6$。
是的，因此30度的弧度是$\pi/6$。
弧度＝rad
以后角度用弧度表示的时候写成rad。
更准确地说，弧度是角度对应的圆弧的长度与半径的比值。
180度＝π(rad)
360度＝2π(rad)
90度＝$\frac{\pi}{2}$(rad)
这种表示方法称为弧度法。


为什么特意用这么麻烦的表示方法？
画圆也很麻烦……
用弧度法表示会有很多便利。
ℓ
θ
r
比如考虑一下如何求圆弧的长度 l。
角度和半径为 1 时圆弧的长度是一样的。
圆弧的长度 $\ell=\theta R$
可以很简单地避免 π 的出现。
是吗？同样圆的面积 πr^2 呢？
这样一来，
扇形的面积 $\frac{\theta}{2\pi}\pi r^2=\frac{1}{2}\theta r^2=\frac{1}{2}\ell r$
这也是弧度。
360 度对应的面积是 πr^2，所以半圆的面积是 $1/2\pi r^2$。
另外弧度法用于三角函数的时候也很方便。
以后请习惯这种方法。
好的！

3. 复数的四则运算

了解了复数的大小和辐角的计算方法，
哈
接下来很期待讲讲复数之间的四则运算。
我很乐意！
无论什么样的数，
都能做加减乘除运算，不是吗?
咔
咔
冰室小姐真喜欢数学啊……
像前面说过的那样，实部和虚部之间不能做加减运算。
大麦茶
美味
实部之间、虚部之间可以进行四则运算。
先说明一下，$\dot{Z}_1$ 和 $\dot{Z}_2$ 是不同的数。
$\dot{Z}_1=a_1+b_1i$
$\dot{Z}_2=a_2+b_2i$
以后要记住符号相同但下标不同就意味着表示不同的数。
是！

那么，我们干脆一口气全部讲完吧。

交换法则（$\dot{Z}_1+\dot{Z}_2=\dot{Z}_2+\dot{Z}_1$）也成立哦。

加法运算

$$\dot{Z}_1+\dot{Z}_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a_1+a_2+b_1i+b_2i=a_1+a_2+(b_1+b_2)\,i$$

但减法运算中交换法则却并不成立，也就是说，$\dot{Z}_1-\dot{Z}_2\neq\dot{Z}_2-\dot{Z}_1$

减法运算

$$\dot{Z}_1-\dot{Z}_2=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=a_1-a_2+b_1i-b_2i=a_1-a_2+(b_1-b_2)\,i$$

关于乘法运算，使用乘法分配法则，计算过程中利用 $i^2=-1$ 就可以了。

乘法运算

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1\times\dot{Z}_2&=(a_1+b_1i)\times(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1ib_2i\\&=a_1a_2+b_1b_2i^2+a_1b_2i+b_1a_2i=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)\,i\end{aligned}$$

除法运算稍微有点儿麻烦呢。但是，只要把分数的分子和分母同时乘以同一个数字，把分母中的虚数消除掉，然后再跟乘法运算一样进行简单的计算就可以了。

除法运算

$$\begin{aligned}\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}&=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\times\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}\\&=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+b_1a_2i-b_1b_2i^2}{a_2^2-a_2b_2i+b_2a_2i-b_2^2i^2}\\&=\frac{a_1a_2+(b_1a_2-a_1b_2)\,i+b_1b_2}{a_2^2+(-a_2b_2+a_2b_2)\,i+b_2^2}\\&=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(b_1a_2-a_1b_2)\,i}{a_2^2+b_2^2}\\&=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i\end{aligned}$$

分子和分母同时乘上的 $a_2-b_2\mathrm{i}$ 这个数字是从哪里来的啊?

这个数字就是把分母这个复数虚部的符号变成相反的符号（原来是 + 的话变成 -，原来是 - 的话变成 +）后所组成的新复数。这样一来就能够把分母的虚部消除掉了呢。

好了，接下来我们实际操作一下吧。假设 $\dot{Z}_1=1+2\mathrm{i}$,$\dot{Z}_2=3+4\mathrm{i}$，请分别根据这两个复数进行四则运算。

好，好的!

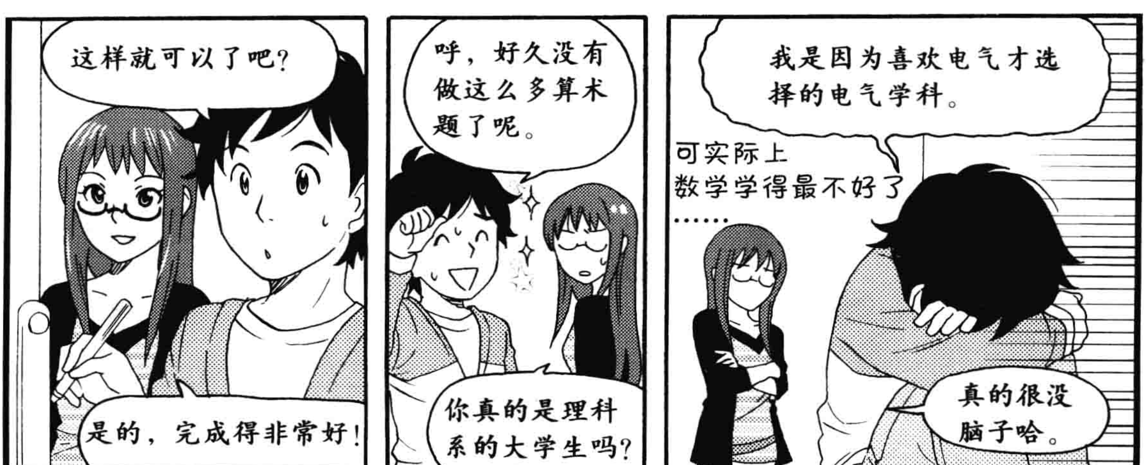
加法运算：$\dot{Z}_1+\dot{Z}_2=(1+2\mathrm{i})+(3+4\mathrm{i})=1+3+2\mathrm{i}+4\mathrm{i}=4+6\mathrm{i}$

减法运算：$\dot{Z}_1-\dot{Z}_2=(1+2\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})=1-3+2\mathrm{i}-4\mathrm{i}=-2-2\mathrm{i}$

乘法运算：$\dot{Z}_1\times\dot{Z}_2=(1+2\mathrm{i})\times(3+4\mathrm{i})=1\times3+1\times4\mathrm{i}+2\mathrm{i}\times3+2\mathrm{i}\times4\mathrm{i}=3-8+(4+6)\mathrm{i}=-5+10\mathrm{i}$

除法运算：

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} &= \frac{1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} \\
&= \frac{1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}\times\frac{3-4\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} \\
&= \frac{1\times3-1\times4\mathrm{i}-2\mathrm{i}\times3-2\mathrm{i}\times4\mathrm{i}}{3^2-3\times4\mathrm{i}+4\mathrm{i}\times3+4^2\mathrm{i}^2} \\
&= \frac{3+(6-4)\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2}{9+(-12+12)\mathrm{i}+16} \\
&= \frac{3+8+2\mathrm{i}}{9+16} \\
&= \frac{11}{25}+\frac{2}{25}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

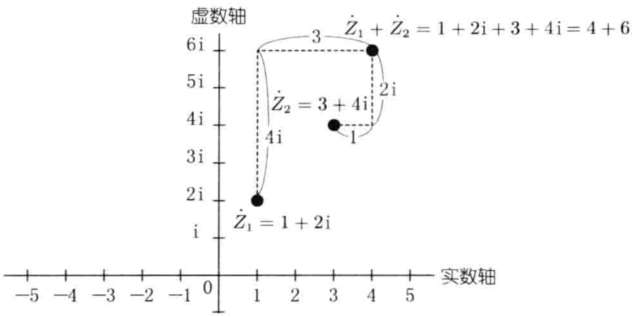


4. 在复平面上画出复数的四则运算

加法运算：$\dot{Z}_1+\dot{Z}_2=(1+2\mathrm{i})+(3+4\mathrm{i})=1+3+2\mathrm{i}+4\mathrm{i}=4+6\mathrm{i}$

1+2i 加上 3+4i 的意义，就是从 1+2i 出发，沿实数轴的正方向移动 3 个单位、再沿虚数轴的正方向移动 4 个单位。也就是说，答案就是 4+6i。

接下来我们分析 $\dot{Z}_2+\dot{Z}_1$ 也就是 3+4i 加上 1+2i 的意义。以 3+4i 为出发点，沿实数轴的正方向移动 1 个单位、再沿虚数轴的正方向移动 2 个单位，这样最终还是到达了 4+6i 这个点，对吧？这就是交换法则成立的原理所在。

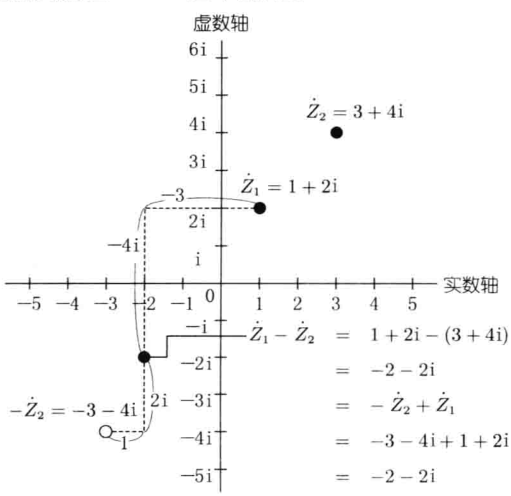


借助图像来分析的确容易理解多了呢。

减法运算：$\dot{Z}_1-\dot{Z}_2=(1+2\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})=1-3+2\mathrm{i}-4\mathrm{i}=-2-2\mathrm{i}$

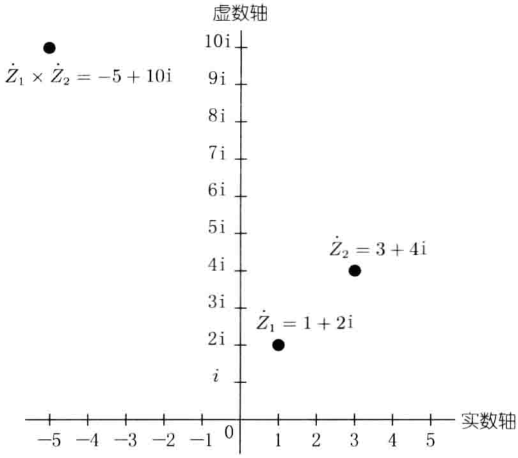
接下来我们继续分析减法的意义。1+2i 减去 3+4i。从 1+2i 这个点出发，沿着实数轴的负方向移动 3 个单位、沿着虚数轴的负方向移动 4 个单位，最后到达的果然是 −2−2i 这个点呢。

接下来我们分析分析 −3−4i 加上 1+2i 是什么情况。在这种情况下，应该是从 −3−4i 这个点出发，沿实数轴的正方向移动 1 个单位、沿虚数轴的正方向移动 2 个单位，最终到达的依然是 −2−2i 这个点呢。



乘法运算： $\dot{Z}_1 \times \dot{Z}_2 = (1+2i) \times (3+4i) = 1 \times 3 + 1 \times 4i + 2i \times 3 + 2i \times 4i = 3 - 8 + (4+6)i = -5 + 10i$

乘法运算不同于加法运算，不能简单理解成沿实数轴或虚数轴的正负方向进行移动。因为 1+2i 乘以 3+4i 的计算结果是 –5+10i，所以，应该是实数轴是 –5、虚数轴是 10i 的点。

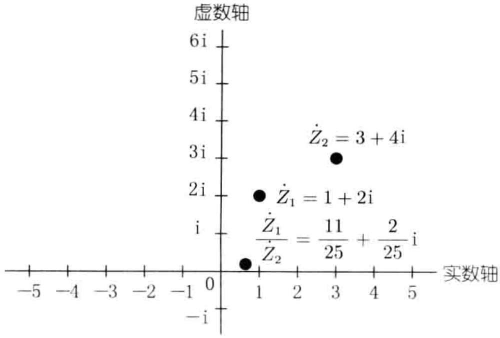


因为 i^2 等于 -1 的缘故啊，一下子飞到了那么远的地方了呢。

除法运算：

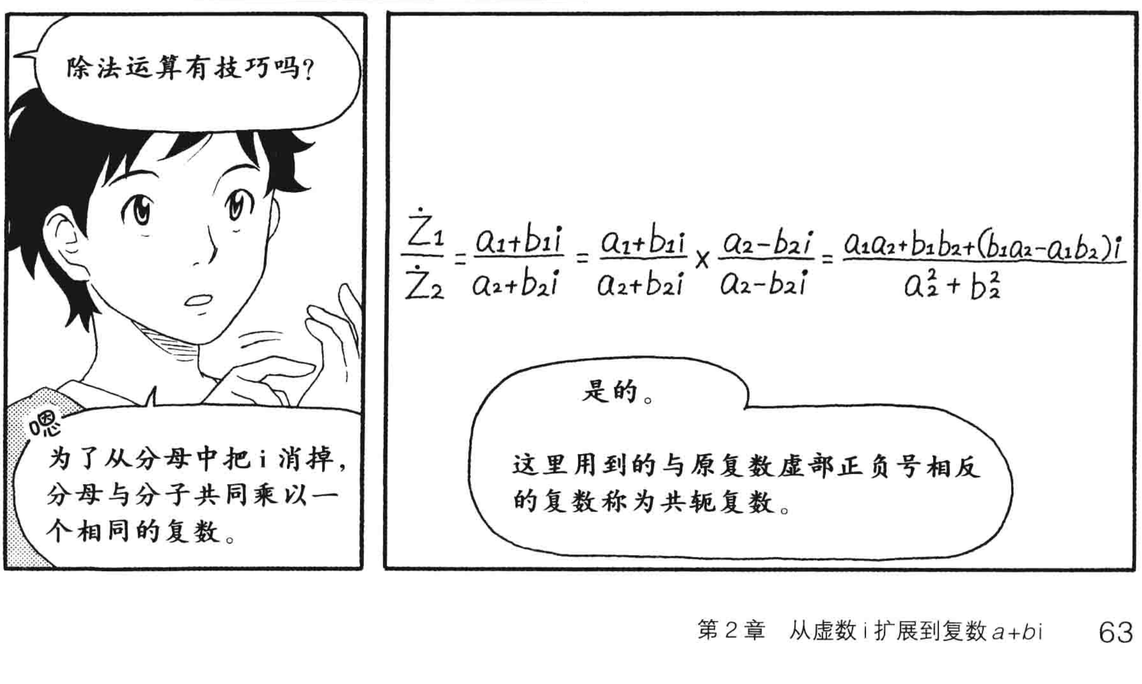
$$\begin{aligned}\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} &= \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{1+2i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{1\times 3 - 1 \times 4i + 2i \times 3 - 2i \times 4i}{3^2 - 3 \times 4i + 4i \times 3 + 4^2 i^2} \\ &= \frac{3 + (6-4)i - 8i^2}{9 + (-12+12)i + 16} = \frac{3+8+2i}{9+16} \\ &= \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i\end{aligned}$$

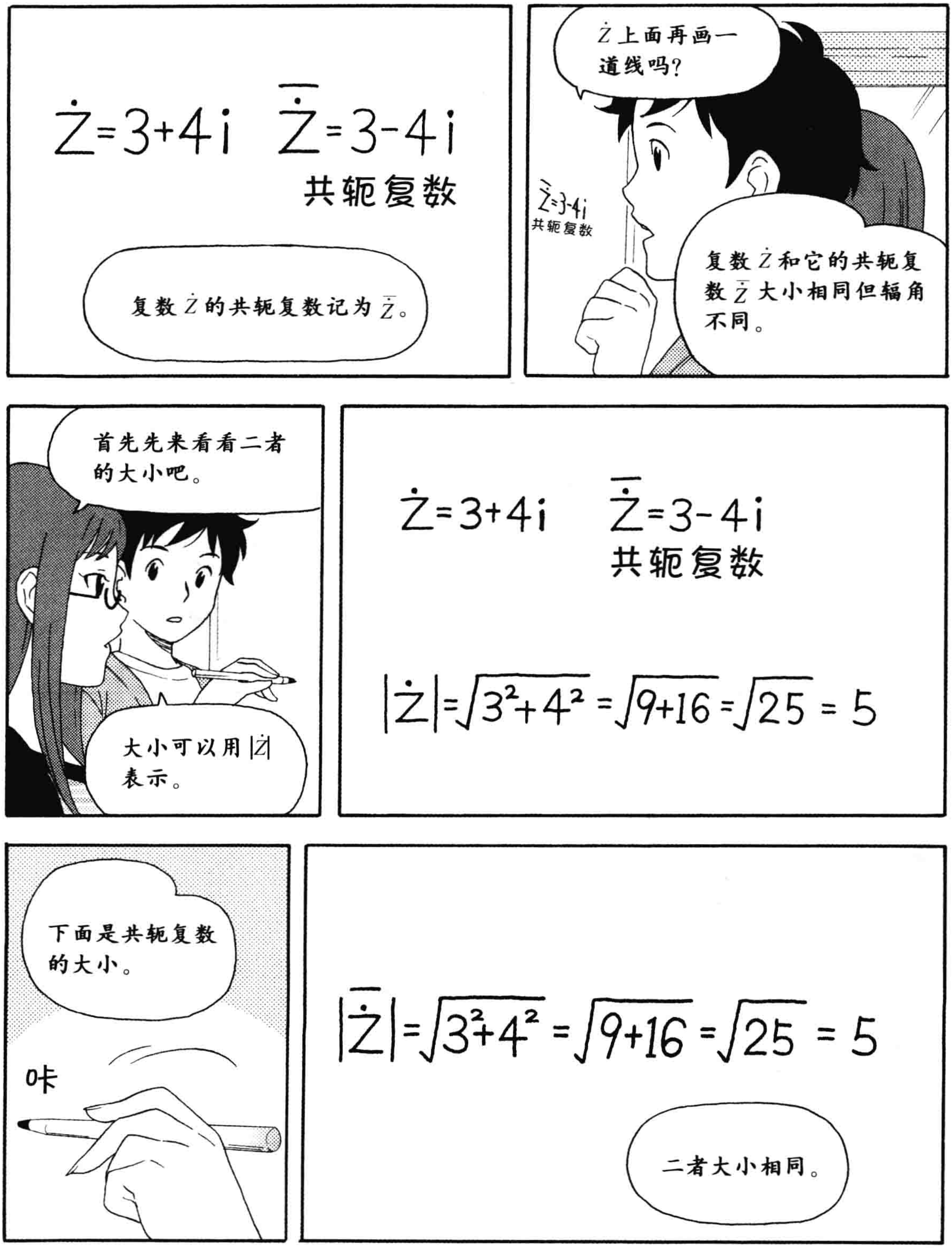
除法运算跟乘法运算相同呢。因为 $\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$，所以除法运算的结果是实数轴是 $\frac{11}{25}$、虚数轴是 $\frac{2}{25}i$ 的点。

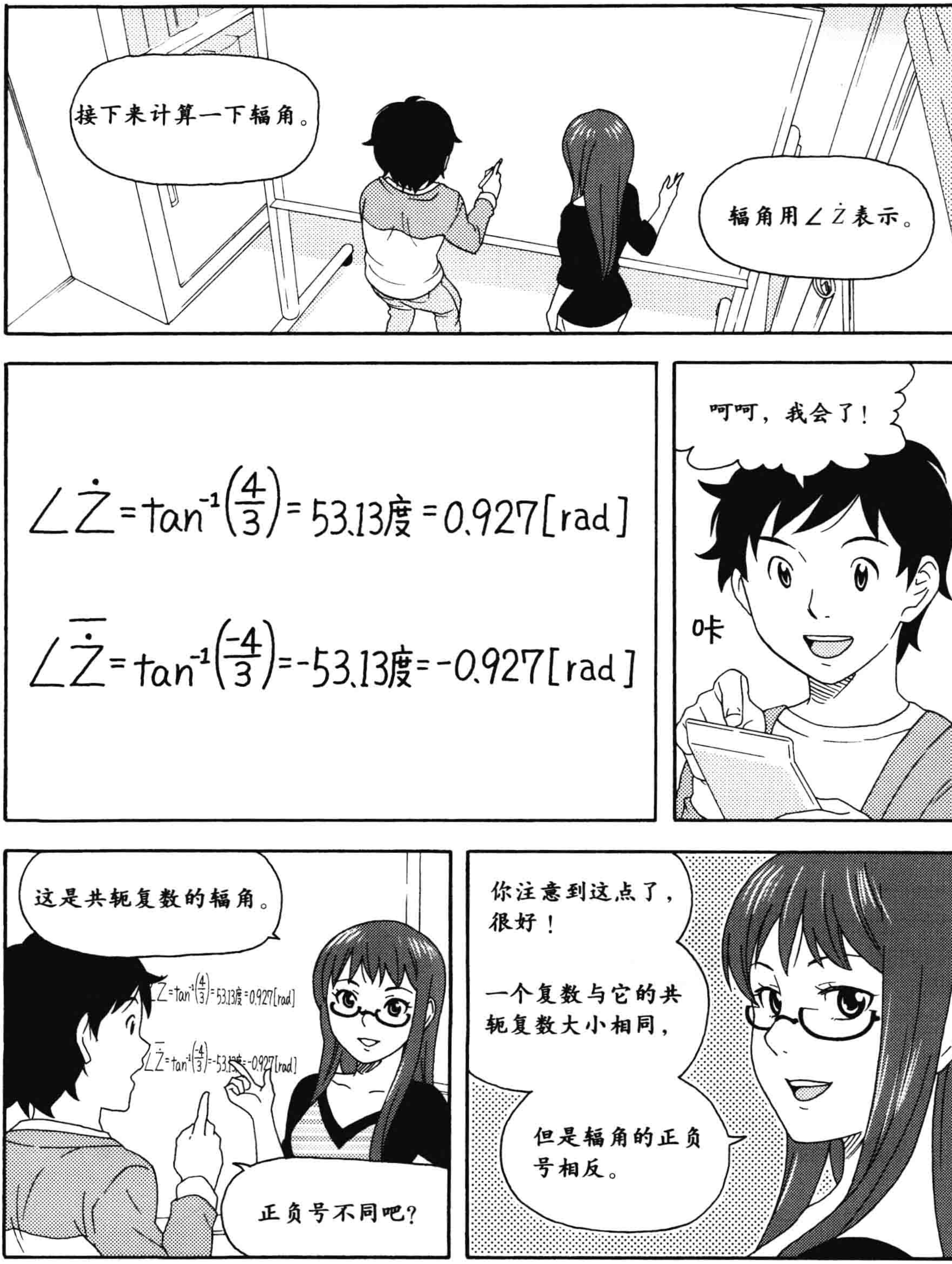


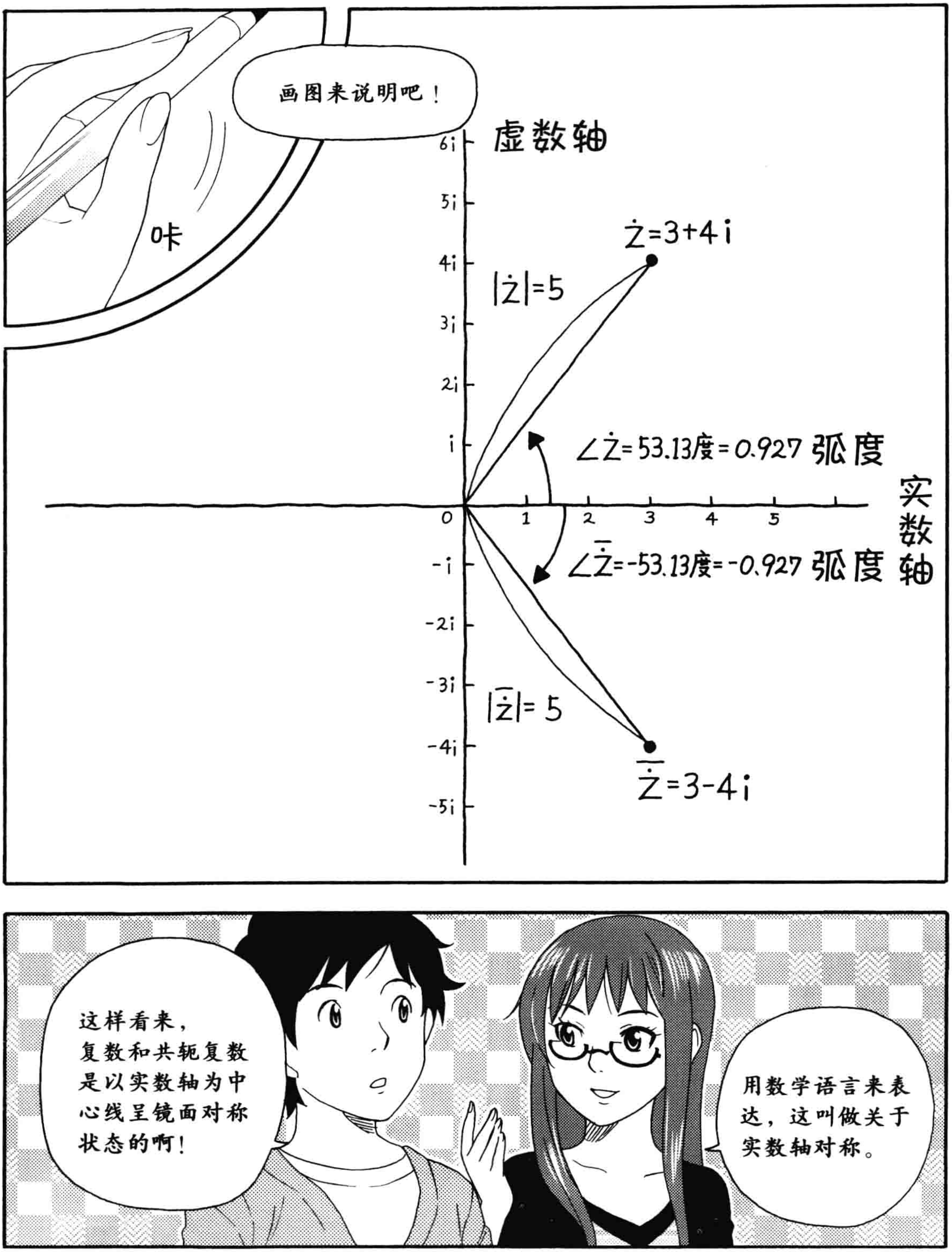

唉，好累啊！
四则运算的结果怎么在复平面上表现，我终于明白了！
复数的乘法和除法运算是比较困难啊！
可是如果使用“极坐标”的话，就会变得很简单。
你，你，你为什么不早说啊！
先不要急，因为学习“极坐标”还需要做些准备。
数学是需要积累的。

5. 共轭复数

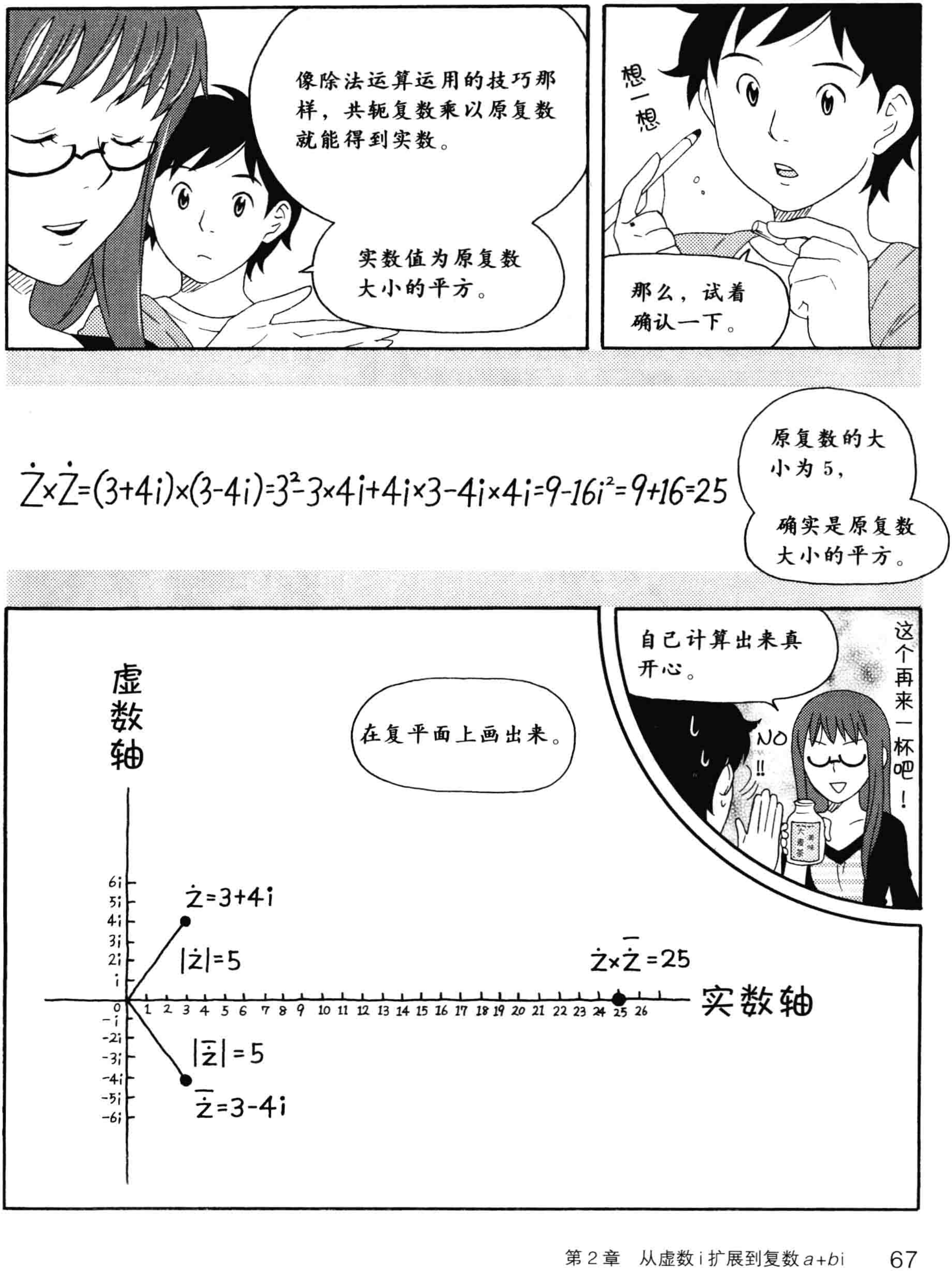

除法运算有技巧吗？
嗯
为了从分母中把i消掉，分母与分子共同乘以一个相同的复数。
$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\times\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$
是的。
这里用到的与原复数虚部正负号相反的复数称为共轭复数。


$\dot{Z}=3+4i \quad \overline{\dot{Z}}=3-4i$
共轭复数
复数$\dot{Z}$的共轭复数记为$\overline{\dot{Z}}$。
$\dot{Z}$上面再画一道线吗?
$\overline{\dot{Z}}=3-4i$
共轭复数
复数$\dot{Z}$和它的共轭复数$\overline{\dot{Z}}$大小相同但辐角不同。
首先先来看看二者的大小吧。
大小可以用$|\dot{Z}|$表示。
$\dot{Z}=3+4i \quad \overline{\dot{Z}}=3-4i$
共轭复数
$|\dot{Z}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
下面是共轭复数的大小。
咔
$|\overline{\dot{Z}}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
二者大小相同。

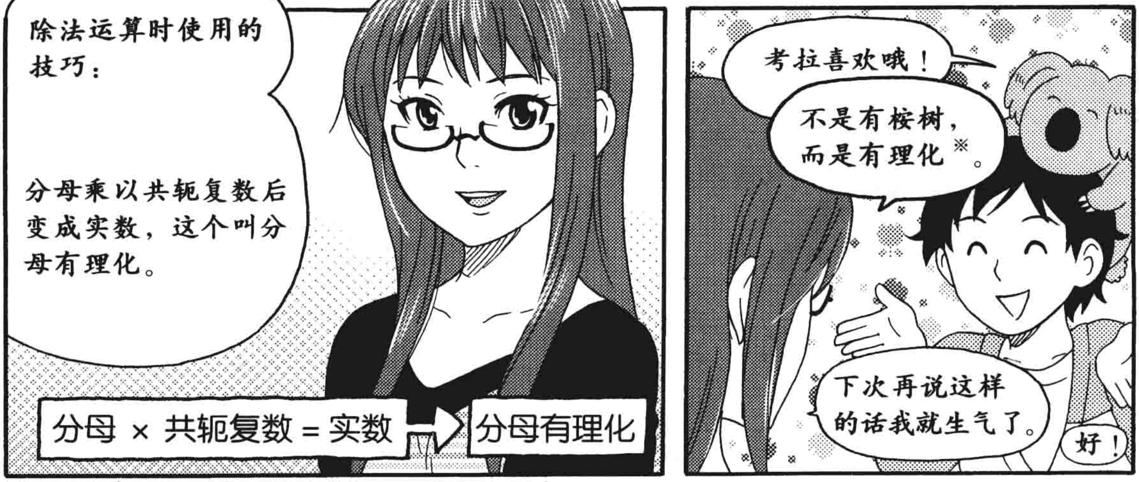

接下来计算一下辐角。
辐角用$\angle\dot{Z}$表示。
$\angle\dot{Z}=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=53.13$度$=0.927[\mathrm{rad}]$
$\angle\overline{\dot{Z}}=\tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)=-53.13$度$=-0.927[\mathrm{rad}]$
呵呵，我会了！
咔
这是共轭复数的辐角。
正负号不同吧？
你注意到这点了，很好！
一个复数与它的共轭复数大小相同，
但是辐角的正负号相反。



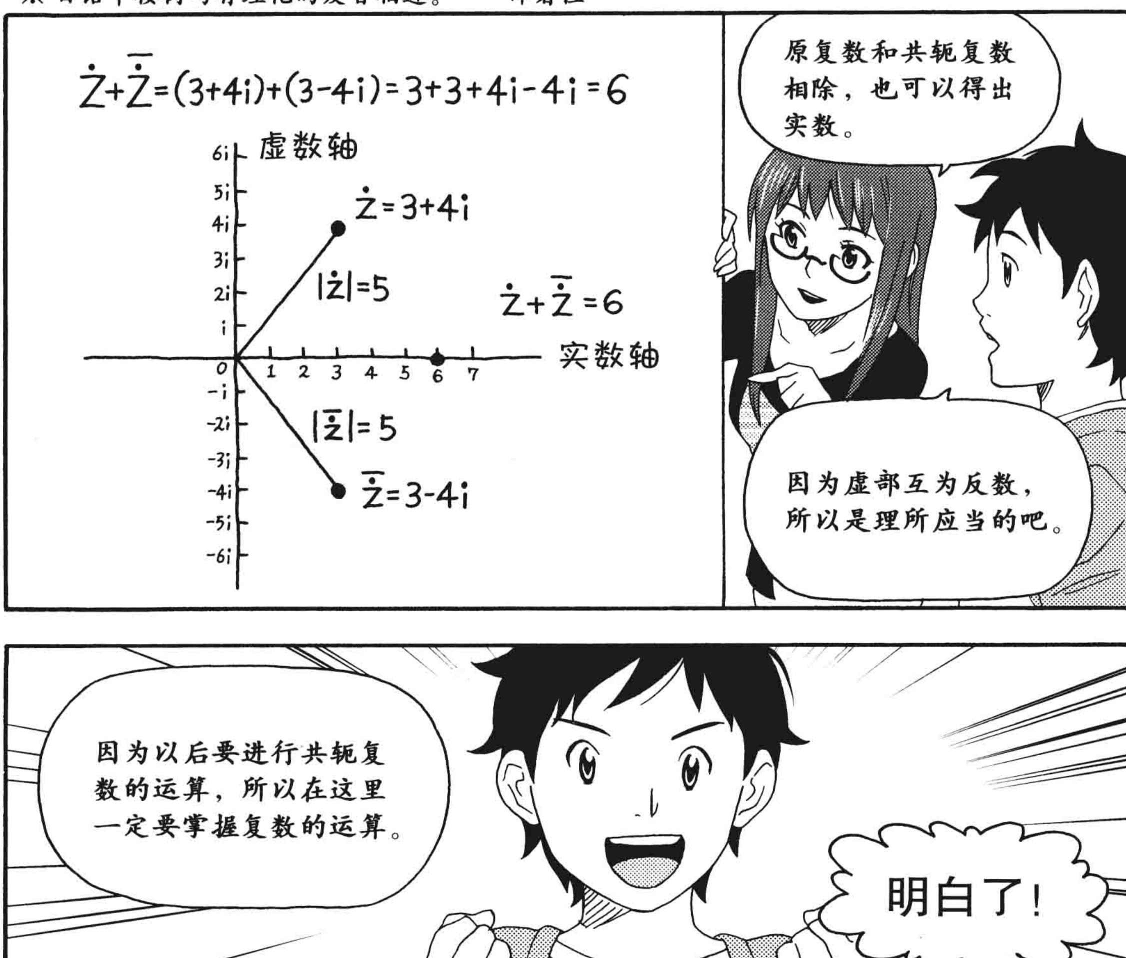
画图来说明吧！
咔
虚数轴
6i
5i
4i
3i
2i
i
0
-i
-2i
-3i
-4i
-5i
1
2
3
4
5
实数轴
$\dot{Z}=3+4i$
$|\dot{Z}|=5$
$\angle\dot{Z}=53.13$度$=0.927$ 弧度
$\angle\bar{\dot{Z}}=-53.13$度$=-0.927$ 弧度
$|\bar{\dot{Z}}|=5$
$\bar{\dot{Z}}=3-4i$
这样看来，复数和共轭复数是以实数轴为中心线呈镜面对称状态的啊！
用数学语言来表达，这叫做关于实数轴对称。



像除法运算运用的技巧那样，共轭复数乘以原复数就能得到实数。
实数值为原复数大小的平方。
想一想
那么，试着确认一下。
$\dot{z}\times\bar{\dot{z}}=(3+4i)\times(3-4i)=3^2-3\times4i+4i\times3-4i\times4i=9-16i^2=9+16=25$
原复数的大小为5，
确实是原复数大小的平方。
自己计算出来真开心。
这个再来一杯吧！
NO!!
在复平面上画出来。
虚数轴
实数轴
$\dot{z}=3+4i$
$|\dot{z}|=5$
$|\bar{\dot{z}}|=5$
$\bar{\dot{z}}=3-4i$
$\dot{z}\times\bar{\dot{z}}=25$



※ 日语中桉树与有理化的发音相近。——译者注




那么，今天到这里吧！
呼
心旷神怡的 美味 大麦茶
咕咚咕咚咕咚
你也喝点?
谢谢，不用了！
一般不说这么多话，所以觉得很渴。
咔
你总是读很难的书啊？
冰室小姐的名字是爱啊？
好名字！
论文资料
虚数篇③冰室爱
是吗？我不喜欢。
没什么内容的名字。
咦？
怎么会呢？


那么，“爱”是什么？
“爱”的定义吗？
不是太清楚……
不过是很重要的
东西吧！
大家都不清楚而凭
感觉在使用，
多么空洞的词啊！
和虚数i完全
不同。
冰室小姐
……
回去吧，
好像累了。
冰室小姐怎么了？
……

6. 练习题

【Ⅰ】请将下面包含复数的数学算式简化到最简形式。

(1) $(3+2\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i})$　　(2) $(7+5\mathrm{i})-(4-2\mathrm{i})$

(3) $(6-2\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})$　　(4) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})(2+\sqrt{3}\mathrm{i})$

(5) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}\right)(4+4\mathrm{i})$　　(6) $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i})$

(7) $-3\mathrm{i}(3+2\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})$

解答

(1)
$$\begin{aligned}&(3+2\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i})\\=\;&3+4+(2-3)\mathrm{i}=7-\mathrm{i}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(7+5\mathrm{i})-(4-2\mathrm{i})\\=\;&7-4+(5+2)\mathrm{i}=3+7\mathrm{i}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(6-2\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})\\=\;&6\times1+6\times4\mathrm{i}-2\mathrm{i}\times1-2\mathrm{i}\times4\mathrm{i}\\=\;&6+24\mathrm{i}-2\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2\\=\;&6-8\times(-1)+(24-2)\mathrm{i}\\=\;&6+8+22\mathrm{i}=14+22\mathrm{i}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(\sqrt{3}+\mathrm{i})(2+\sqrt{3}\mathrm{i})\\=\;&\sqrt{3}\times2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}\mathrm{i}+2\mathrm{i}+\sqrt{3}\mathrm{i}^2\\=\;&2\sqrt{3}+\sqrt{3}\times(-1)+(3+2)\mathrm{i}\\=\;&2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5\mathrm{i}=\sqrt{3}+5\mathrm{i}\end{aligned}$$

(5)

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}\right)(4+4\mathrm{i}) \\
= \ & \frac{\sqrt{3}}{2}\times 4+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\mathrm{i}-\sqrt{2}\mathrm{i}\times 4-\sqrt{2}\mathrm{i}\times 4\mathrm{i} \\
= \ & 2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\mathrm{i}-4\sqrt{2}\mathrm{i}-4\sqrt{2}\mathrm{i}^2 \\
= \ & 2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\times(-1)+(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})\mathrm{i} \\
= \ & 2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})\mathrm{i} \ = 2(\sqrt{3}+2\sqrt{2})+2(\sqrt{3}-2\sqrt{2})\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
& \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i}) \\
= \ & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{2}\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\times\sqrt{2}\mathrm{i} \\
= \ & -\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}\times(-1)+\left(\frac{2\times 2}{3}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{i} \\
= \ & -\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{i} \\
= \ & \frac{-2\sqrt{6}\times 2-\sqrt{6}\times 3}{6}+\left(\frac{4\times 2-3\times 3}{6}\right)\mathrm{i} \\
= \ & \frac{-4\sqrt{6}-3\sqrt{6}}{6}+\left(\frac{8-9}{6}\right)\mathrm{i} \\
= \ & -\frac{7\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{6}\mathrm{i} \\
= \ & \frac{-7\sqrt{6}-\mathrm{i}}{6} \\
= \ & -\frac{7\sqrt{6}+\mathrm{i}}{6}
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
& -3\mathrm{i}(3+2\mathrm{i})(4-3\mathrm{i}) \\
= \ & -3\mathrm{i}(3\times 4-3\times 3\mathrm{i}+2\mathrm{i}\times 4-2\mathrm{i}\times 3\mathrm{i}) \\
= \ & -3\mathrm{i}(12-6\times(-1)-9\mathrm{i}+8\mathrm{i}) \\
= \ & -3\mathrm{i}(12+6-\mathrm{i}) \\
= \ & -3\mathrm{i}(18-\mathrm{i}) \\
= \ & -3\mathrm{i}\times 18+3\mathrm{i}\times\mathrm{i} \\
= \ & -54\mathrm{i}+3\times(-1) \\
= \ & -3-54\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

【Ⅱ】共轭复数的相关问题

假设$\dot{Z}=4-7\mathrm{i}$，如果用$\overline{\dot{Z}}=4+7\mathrm{i}$来表示共轭复数的话，请进行如下计算。

(1) $\overline{\dot{Z}}+2$　　(2) $\dot{Z}+\overline{\dot{Z}}$　　(3) $3\dot{Z}+2\overline{\dot{Z}}$

(4) $-\dot{Z}-5\overline{\dot{Z}}$　　(5) $\overline{\dot{Z}}\cdot\dot{Z}$　　(6) $\dfrac{\overline{\dot{Z}}}{\dot{Z}}$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\overline{\dot{Z}}+2 &= 4+7\mathrm{i}+2\\ &= 6+7\mathrm{i}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\dot{Z}+\overline{\dot{Z}} &= 4-7\mathrm{i}+4+7\mathrm{i}\\ &= 8\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}3\dot{Z}+2\overline{\dot{Z}} &= 3\times(4-7\mathrm{i})+2\times(4+7\mathrm{i})\\ &= 12-21\mathrm{i}+8+14\mathrm{i}\\ &= 12+8+(14-21)\,\mathrm{i}\\ &= 20-7\mathrm{i}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}-\dot{Z}-5\overline{\dot{Z}} &= -1\times(4-7\mathrm{i})-5\times(4+7\mathrm{i})\\ &= -4+7\mathrm{i}-20-35\mathrm{i}\\ &= -4-20+(7-35)\mathrm{i}\\ &= -24-28\mathrm{i}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\overline{\dot{Z}}\cdot\dot{Z} &= (4+7\mathrm{i})\,(4-7\mathrm{i})\\ &= 4\times4-4\times7\mathrm{i}+7\mathrm{i}\times4-49\times\mathrm{i}^2\\ &= 16-28\mathrm{i}+28\mathrm{i}-49\times(-1)\\ &= 16+49\\ &= 65\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{\overline{\dot{Z}}}{\dot{Z}} = \dfrac{4+7\mathrm{i}}{4-7\mathrm{i}} = \dfrac{4+7\mathrm{i}}{4-7\mathrm{i}} \times \dfrac{4+7\mathrm{i}}{4+7\mathrm{i}}$

$$= \frac{4\times 4+4\times 7\mathrm{i}+7\mathrm{i}\times 4+7\mathrm{i}\times 7\mathrm{i}}{4\times 4+4\times 7\mathrm{i}-7\mathrm{i}\times 4-49\times \mathrm{i}^2}$$

$$= \frac{16+28\mathrm{i}+28\mathrm{i}+49\times(-1)}{16+28\mathrm{i}-28\mathrm{i}-49\times(-1)}$$

$$= \frac{16-49+56\mathrm{i}}{16+49}$$

$$= \frac{-33+56\mathrm{i}}{65}$$

$$= -\frac{33}{65}+\frac{56}{65}\mathrm{i}$$

【 Ⅲ 】请将下面的复数的分数进行有理化，并进行简化。

(1) $\dfrac{3}{1+\mathrm{i}}$

(2) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}$

(3) $\dfrac{2-2\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}}$

(4) $\dfrac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$

解答

(1) $\dfrac{3}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{3}{1+\mathrm{i}} \times \dfrac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

$$= \frac{3-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}$$

$$= \frac{3-3\mathrm{i}}{1-(-1)} = \frac{3-3\mathrm{i}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\frac{2+3\mathrm{i}}{4\mathrm{i}} &= \frac{2+3\mathrm{i}}{4\mathrm{i}} \times \frac{-4\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}} \\
&= \frac{2\times(-4\mathrm{i})+3\mathrm{i}\times(-4\mathrm{i})}{-16\mathrm{i}^2} \\
&= \frac{-8\mathrm{i}-12\mathrm{i}^2}{-16\times(-1)} \\
&= \frac{-8\mathrm{i}-12\times(-1)}{16} \\
&= \frac{12-8\mathrm{i}}{16} \\
&= \frac{3-2\mathrm{i}}{4} \\
&= \frac{3}{4}-\frac{2\mathrm{i}}{4} \\
&= \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
\frac{2-2\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}} &= \frac{2-2\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}} \times \frac{2-5\mathrm{i}}{2-5\mathrm{i}} \\
&= \frac{2\times2-2\times5\mathrm{i}-2\mathrm{i}\times2+2\mathrm{i}\times5\mathrm{i}}{2\times2-2\times5\mathrm{i}+5\mathrm{i}\times2-5\mathrm{i}\times5\mathrm{i}} \\
&= \frac{4-10\mathrm{i}-4\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2}{4-10\mathrm{i}+10\mathrm{i}-25\mathrm{i}^2} \\
&= \frac{4+10\times(-1)-14\mathrm{i}}{4-25\times(-1)} \\
&= \frac{4-10-14\mathrm{i}}{4+25} \\
&= \frac{-6-14\mathrm{i}}{29} \\
&= -\frac{6}{29}-\frac{14}{29}\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

(4) $$\begin{aligned}\frac{3-2i}{2+3i} &= \frac{3-2i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} \\ &= \frac{3 \times 2 - 3 \times 3i - 2i \times 2 + 2i \times 3i}{2 \times 2 - 2 \times 3i + 3i \times 2 - 3i \times 3i} \\ &= \frac{6 - 9i - 4i + 6i^2}{4 - 6i + 6i - 9i^2} \\ &= \frac{6 + 6 \times (-1) + (-9 - 4)i}{4 - 9 \times (-1)} \\ &= \frac{6 - 6 - 13i}{4 + 9} \\ &= \frac{-13i}{13} \\ &= -i\end{aligned}$$

CHAPTER 03

第3章

极坐标表示

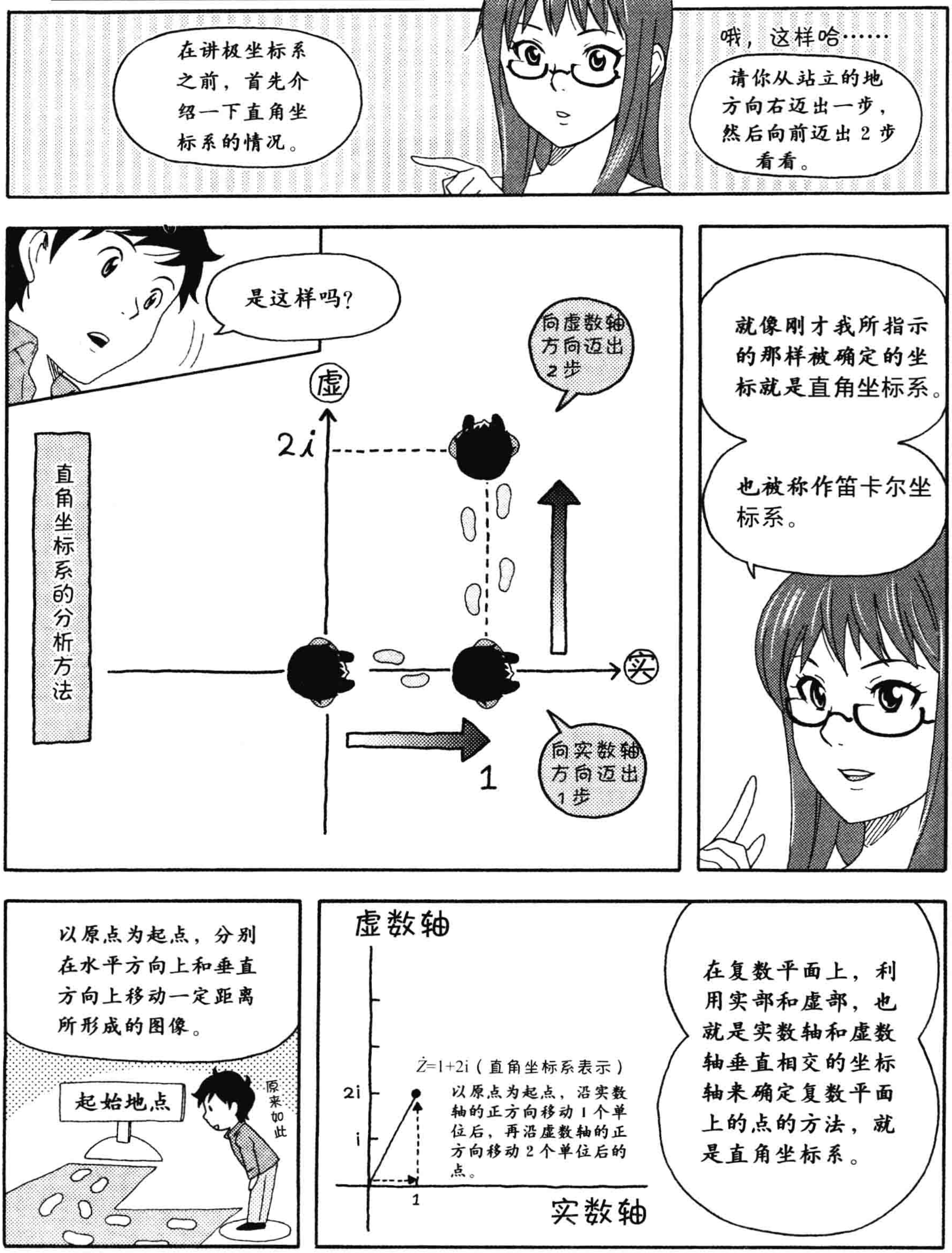

啊哈哈哈哈哈
原来如此，你动了“数学女王”这位太岁头上的土啊。
总觉得她好像很生气呢……
要想办法跟她和好，你可得来问问我了。
对于女性，就要用甜食来拿下！
总之，避免跟她正面交锋，直接送她甜食品尝，吃完之后心情就会立马好起来了！
是吗……
姐姐、妹妹、妈妈、奶奶……
我可是在女性堆里长大的孩子，
听我的准没错！
相当没地位
父亲
奶奶
妈妈
姐姐
我
妹妹
妹
女性数轴？

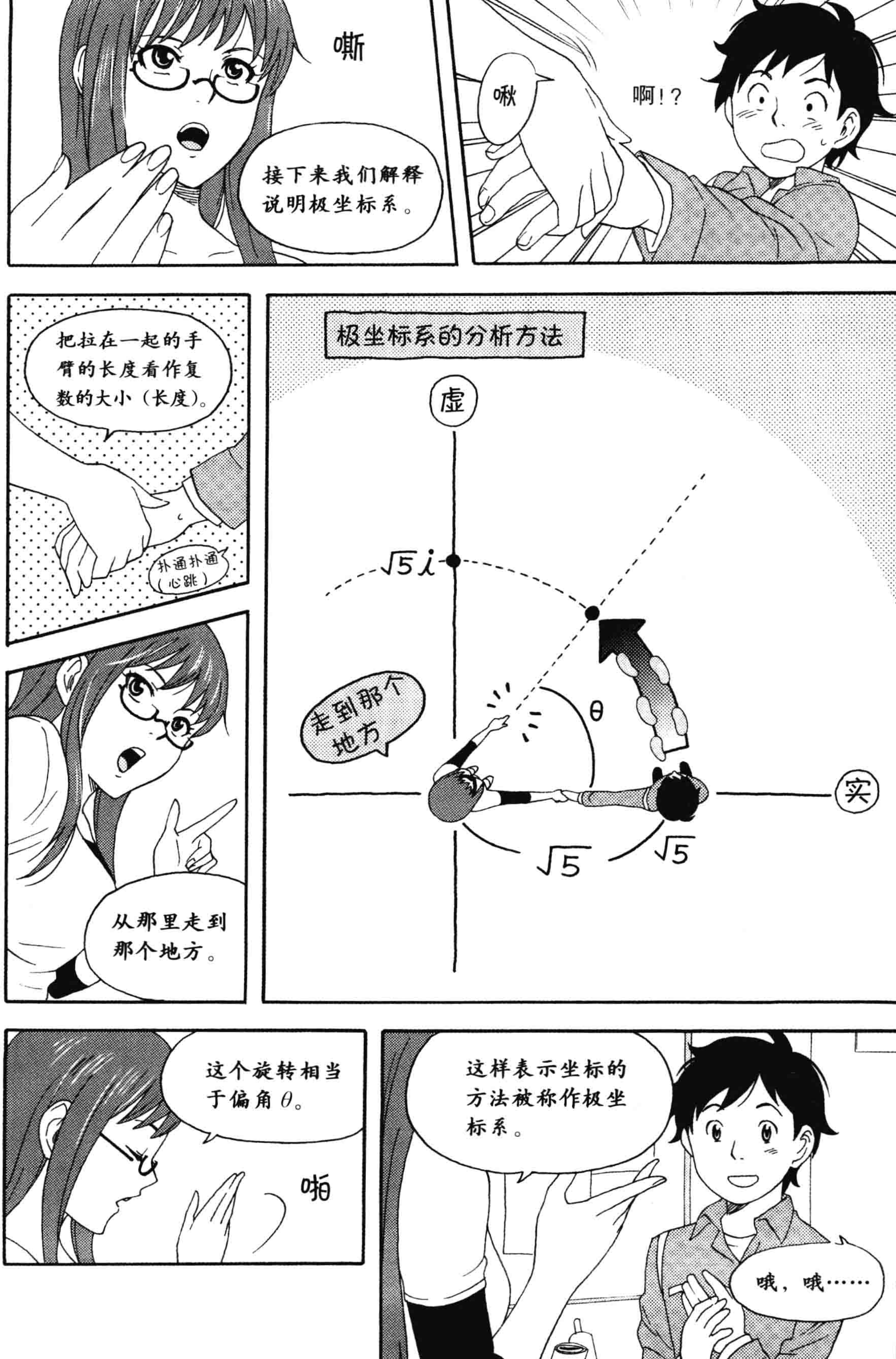

冰室小姐好像的确很喜欢吃甜的东西呢。
心呵神 大麦茶
美味 香草
所以，这招儿可能不怎么好使吧。
还有没有其他办法啊？
哎呀，到了上课时间了。
没有。
冰室研究室
嗯……
徘徊
徘徊
冰室研究室
到底该怎么道歉才好呢？
用数字来道歉倒是个不错的主意呢！5963，您辛苦了！
或者……
真是不成器……
站在这里可挡住别人的路了哈！

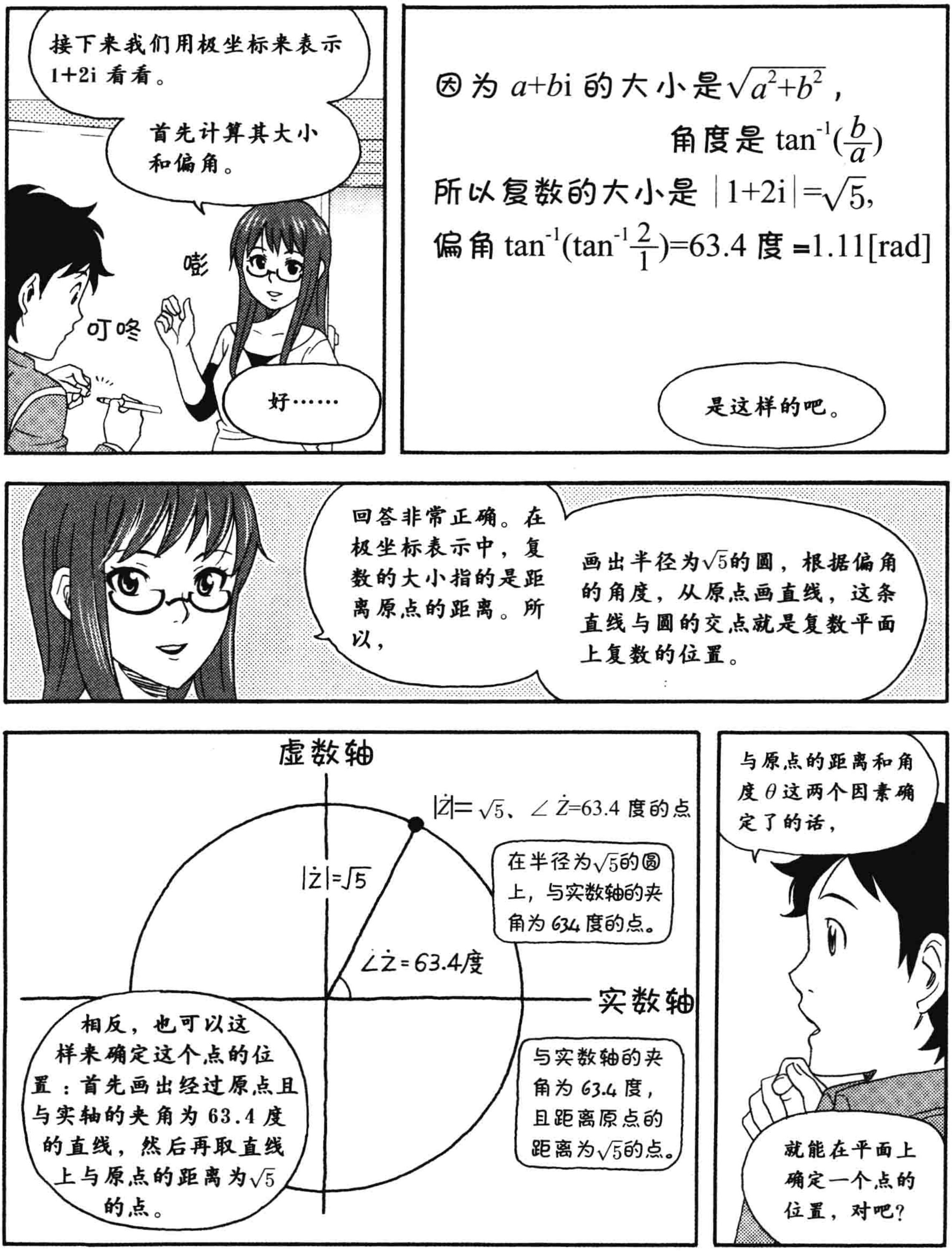
冰室小姐！
那朵花……
我是拿来给它换水的。
嘶
不进来吗？
咔啦
好，好的！
哐当
那个……
冰室小姐，这些天来……
谢谢您了！
……咦？

我还以为你不会再来了呢。
怎么会呢……那个,之前的事情,真是对不起了。
都是我不好,请您一定别往心里去。
要不这样吧,你教给我极坐标系的相关知识,这样我们就算两清了。
极坐标系?
你不是说过嘛,利用极坐标系能够简化乘法运算和除法运算!
好了,不跟你开玩笑了。关于复数的大小和偏角,你已经很清楚了,对吧?
是的!
呵…

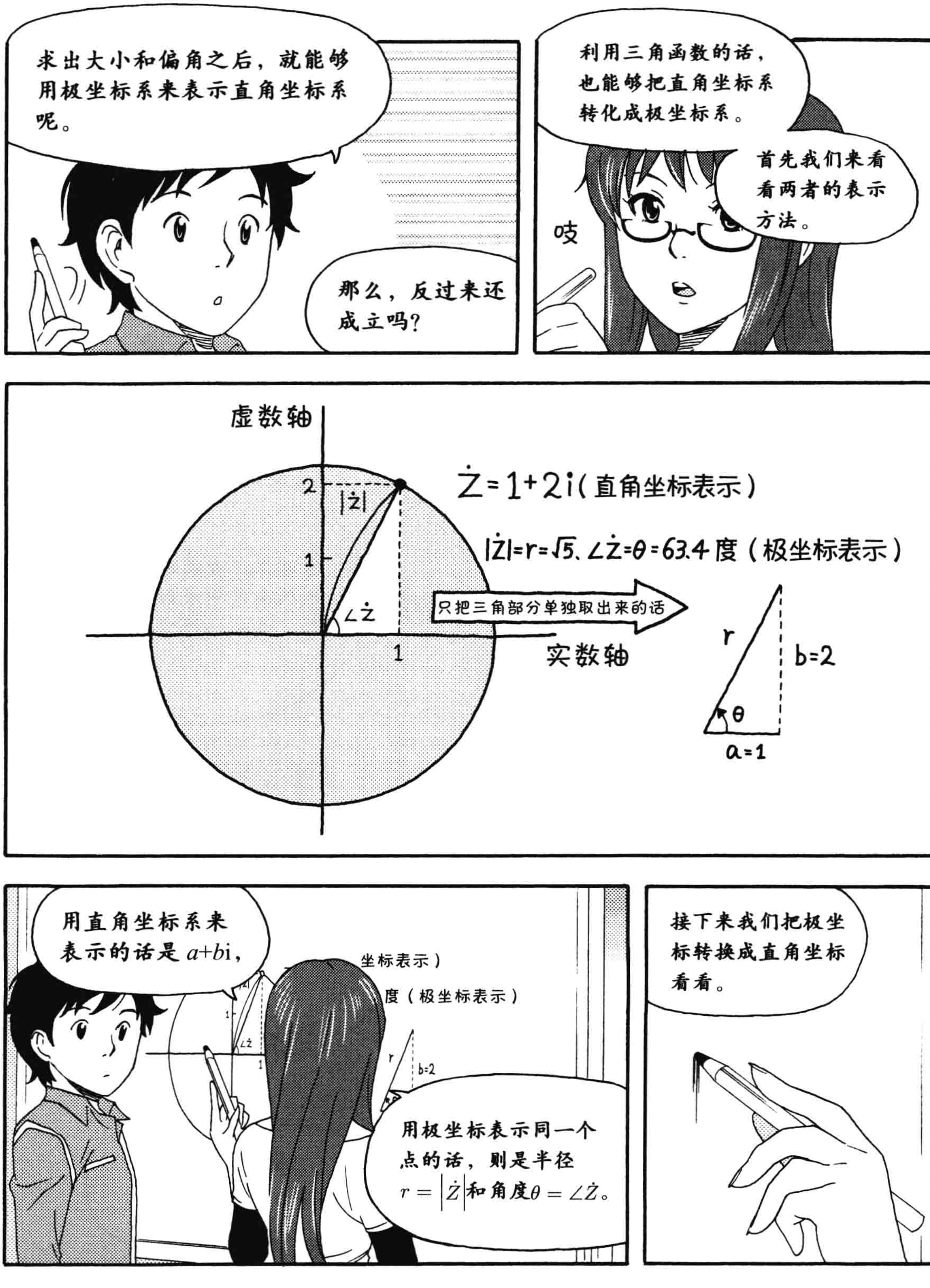
1. 直角坐标系和极坐标系



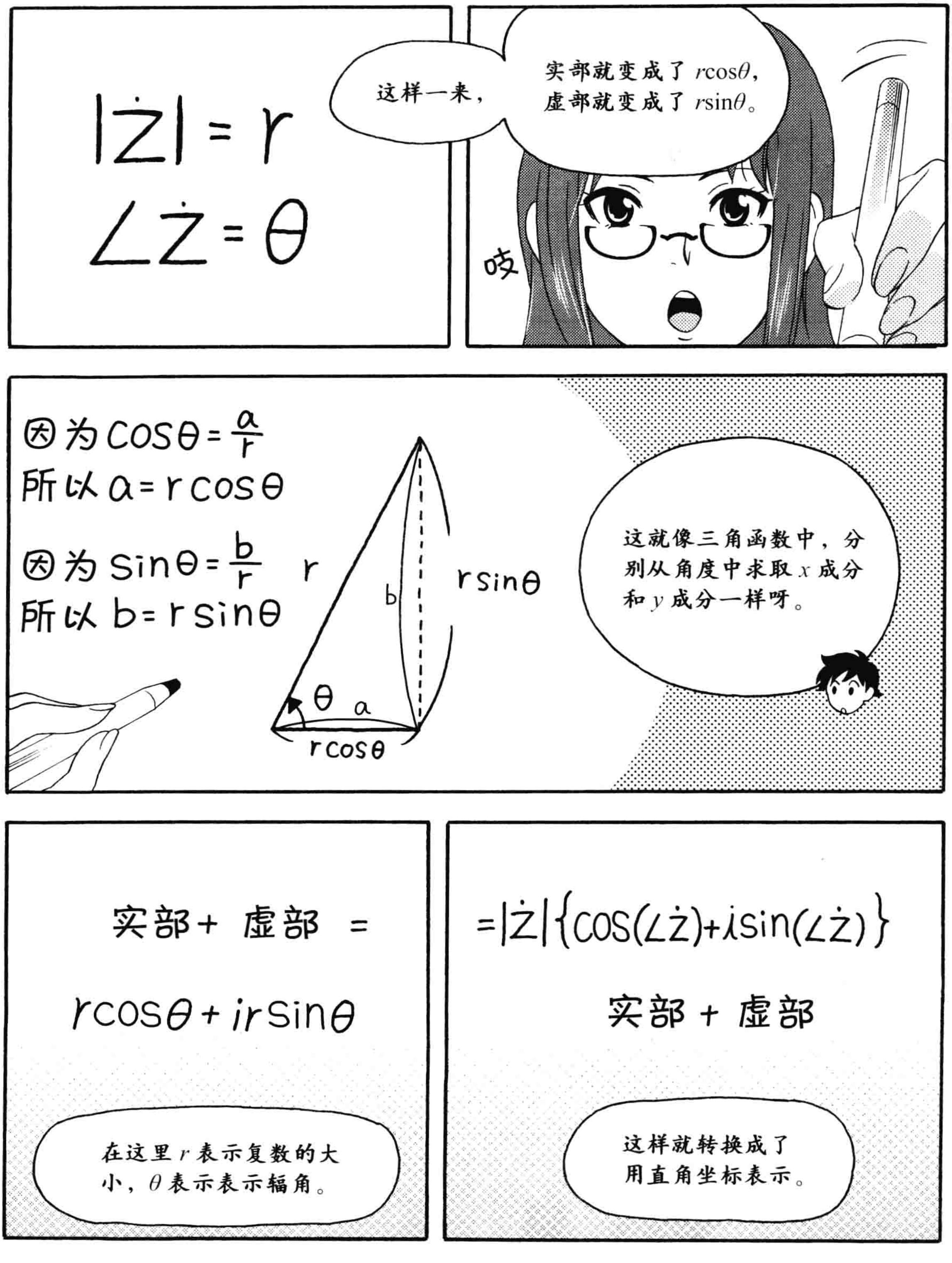

嘶
接下来我们解释说明极坐标系。
啾
啊!?
把拉在一起的手臂的长度看作复数的大小（长度）。
扑通扑通（心跳）
从那里走到那个地方。
极坐标系的分析方法
虚
实
$\sqrt{5}i$
θ
走到那个地方
$\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$
这个旋转相当于偏角 θ。
啪
这样表示坐标的方法被称作极坐标系。
哦，哦……



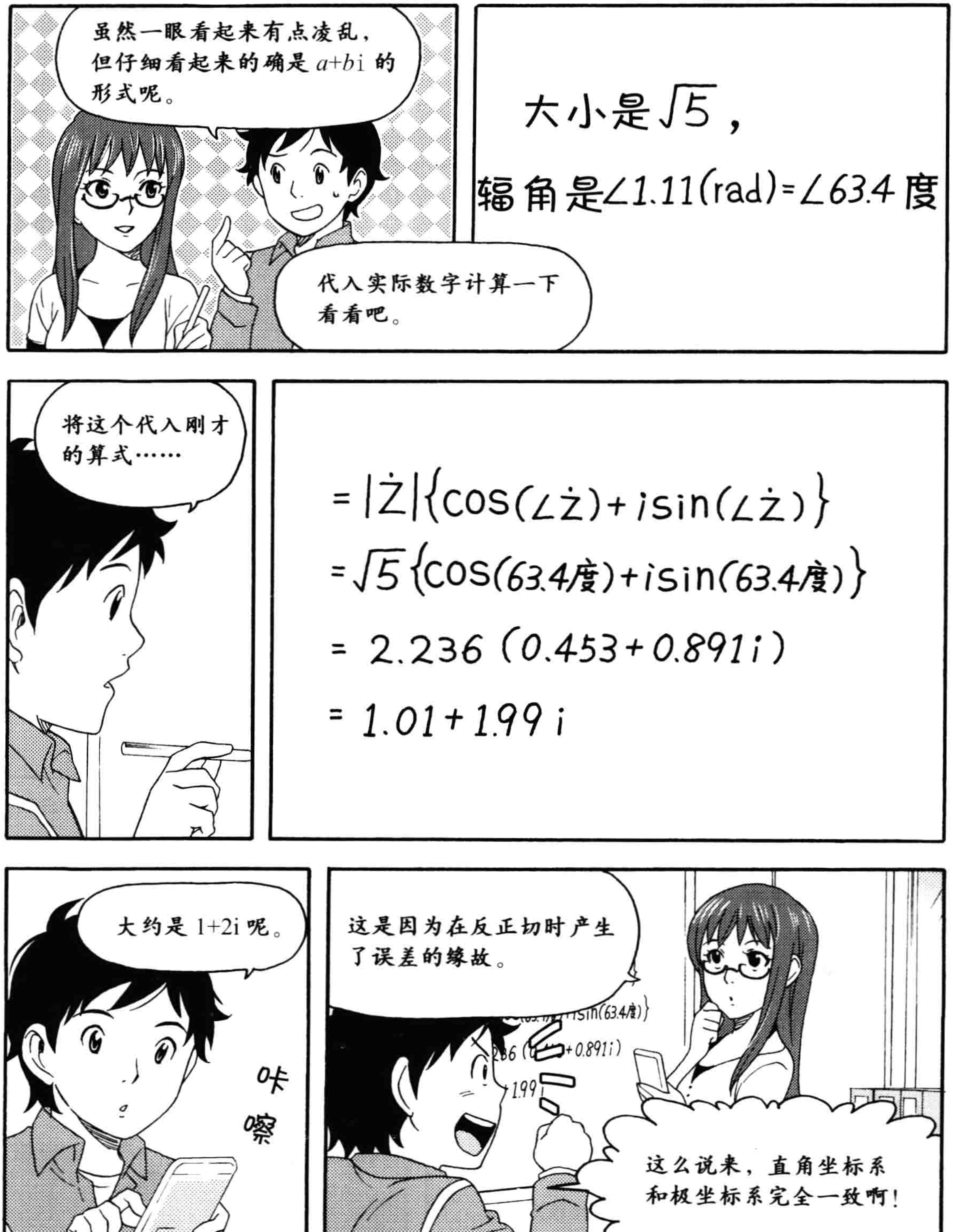
接下来我们用极坐标来表示 1+2i 看看。
首先计算其大小和偏角。
嘭
叮咚
好……
因为 $a+bi$ 的大小是 $\sqrt{a^2+b^2}$，
角度是 $\tan^{-1}(\frac{b}{a})$
所以复数的大小是 $|1+2i|=\sqrt{5}$,
偏角 $\tan^{-1}(\tan^{-1}\frac{2}{1})=63.4$ 度 $=1.11[rad]$
是这样的吧。
回答非常正确。在极坐标表示中，复数的大小指的是距离原点的距离。所以，
画出半径为$\sqrt{5}$的圆，根据偏角的角度，从原点画直线，这条直线与圆的交点就是复数平面上复数的位置。
虚数轴
$|\dot{Z}|=\sqrt{5}$、$\angle\dot{Z}=63.4$ 度的点
$|\dot{Z}|=\sqrt{5}$
在半径为$\sqrt{5}$的圆上，与实数轴的夹角为 634 度的点。
$\angle\dot{Z}=63.4$度
实数轴
相反，也可以这样来确定这个点的位置：首先画出经过原点且与实轴的夹角为 63.4 度的直线，然后再取直线上与原点的距离为$\sqrt{5}$的点。
与实数轴的夹角为 63.4 度，且距离原点的距离为$\sqrt{5}$的点。
与原点的距离和角度 θ 这两个因素确定了的话，
就能在平面上确定一个点的位置，对吧？



求出大小和偏角之后，就能够用极坐标系来表示直角坐标系呢。
那么，反过来还成立吗？
利用三角函数的话，也能够把直角坐标系转化成极坐标系。
吱
首先我们来看看两者的表示方法。
虚数轴
2
1
$|\dot{Z}|$
$\angle\dot{Z}$
1
实数轴
$\dot{Z}=1+2i$（直角坐标表示）
$|\dot{Z}|=r=\sqrt{5}$、$\angle\dot{Z}=\theta=63.4$度（极坐标表示）
只把三角部分单独取出来的话
r
b=2
θ
a=1
用直角坐标系来表示的话是$a+bi$，
用极坐标表示同一个点的话，则是半径$r=|\dot{Z}|$和角度$\theta=\angle\dot{Z}$。
接下来我们把极坐标转换成直角坐标看看。



$|\dot{z}| = r$
$\angle\dot{z} = \theta$
这样一来，
实部就变成了 $r\cos\theta$，虚部就变成了 $r\sin\theta$。
咳
因为 $\cos\theta = \frac{a}{r}$
所以 $a = r\cos\theta$
因为 $\sin\theta = \frac{b}{r}$
所以 $b = r\sin\theta$
r
b
$r\sin\theta$
θ
a
$r\cos\theta$
这就像三角函数中，分别从角度中求取 x 成分和 y 成分一样呀。
实部＋虚部 ＝
$r\cos\theta + ir\sin\theta$
在这里 r 表示复数的大小，θ 表示表示辐角。
$= |\dot{z}|\{\cos(\angle\dot{z}) + i\sin(\angle\dot{z})\}$
实部＋虚部
这样就转换成了用直角坐标表示。


虽然一眼看起来有点凌乱，但仔细看起来的确是 a+bi 的形式呢。
代入实际数字计算一下看看吧。
大小是√5，
辐角是∠1.11(rad)=∠63.4度
将这个代入刚才的算式……
=|ż|{cos(∠ż)+isin(∠ż)}
=√5{cos(63.4度)+isin(63.4度)}
= 2.236 (0.453+0.891i)
= 1.01+1.99i
大约是 1+2i 呢。
咔嚓
这是因为在反正切时产生了误差的缘故。
这么说来，直角坐标系和极坐标系完全一致啊！

※ 关于纳皮尔常数，具体请参考第 102 页，关于旋转矩阵，具体请参考第 126 页。


一点一点的学习能够掌握得更扎实，你能做到这一点我已经很欣慰了。
因为数学绝对不会背叛你的。
所以我才这么喜欢数学啊。
唉！
……对了，我还没感谢你帮我的花儿换水呢。
总之，能有人听我讲述数学知识，我很高兴。
心可神
大麦茶
谢谢。
不客气。
好漂亮的花儿呀！
……


我倒觉得冰室小姐更漂亮呢。
难
道
优太……
这是真心话！
呵呵
呵呵
作为回礼，我该送你点什么呢……
我要把至今为止我见过的最漂亮的
东西拿给你看看。
哼
欢迎你明天再来。
是！

2. 练习题

关于下面的复数，请把直角坐标表示转换成极坐标表示，把极坐标表示转换成直角坐标表示。

(1) $4+4\mathrm{i}$　(2) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$　(3) $5-5\sqrt{3}\mathrm{i}$　(4) $5\,\mathrm{i}$　(5) $-1+\mathrm{i}$

(6) $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$　(7) $3e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$　(8) $6e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$　(9) $2e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$　(10) $\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$

解答

(1)
$$
\begin{aligned}
4+4\mathrm{i} &= \sqrt{4^2+4^2}e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)} \\
&= \sqrt{16+16}e^{\mathrm{i}\tan^{-1}(1)} \\
&= \sqrt{2\times 16}e^{\mathrm{i}45^\circ} \\
&= 4\sqrt{2}e^{\mathrm{i}45^\circ} \\
&= 4\sqrt{2}\angle 45^\circ \\
&= 4\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

另解
$$
\begin{aligned}
4+4\mathrm{i} &= \sqrt{4^2+4^2}\left(\frac{4+4\mathrm{i}}{\sqrt{4^2+4^2}}\right) \\
&= 4\sqrt{2}\left(\frac{4+4\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}\right) \\
&= 4\sqrt{2}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) \\
&= 4\sqrt{2}(\cos 45^\circ+\mathrm{i}\sin 45^\circ) \\
&= 4\sqrt{2}e^{\mathrm{i}45^\circ} \\
&= 4\sqrt{2}\angle 45^\circ \\
&= 4\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(2) $\sqrt{3}+\mathrm{i}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^{2}+1^{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{3+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}30^\circ}\\
&=\sqrt{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}30^\circ}\\
&=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}30^\circ}\\
&=2\angle 30^\circ\\
&=2\angle\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

另解 $\sqrt{3}+\mathrm{i}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^{2}+1^{2}}\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^{2}+1^{2}}}\right)$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{4}\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{4}}\right)\\
&=2\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)\\
&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\
&=2\left(\cos 30^\circ+\mathrm{i}\sin 30^\circ\right)\\
&=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}30^\circ}\\
&=2\angle 30^\circ\\
&=2\angle\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

(3) $5-5\sqrt{3}\mathrm{i}=\sqrt{5^{2}+\left(5\sqrt{3}\right)^{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{-5\sqrt{3}}{5}\right)}$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{25+25\times 3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tan^{-1}(-\sqrt{3})}\\
&=\sqrt{25\times(1+3)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}60^\circ}\\
&=\sqrt{5^{2}\times 4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}60^\circ}\\
&=5\sqrt{2^{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}60^\circ}\\
&=5\times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}60^\circ}\\
&=10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}60^\circ}\\
&=10\angle(-60^\circ)\\
&=10\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

另解

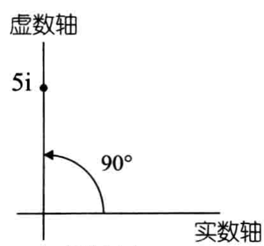
$$\begin{aligned}
5-5\sqrt{3}\mathrm{i} &= \sqrt{5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}\left(\frac{5-5\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}}\right)\\
&= 10\left(\frac{5-5\sqrt{3}\mathrm{i}}{10}\right)\\
&= 10\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\
&= 10\left(\cos\left(-60^\circ\right)+\mathrm{i}\sin\left(-60^\circ\right)\right)\\
&= 10\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-60^\circ)}\\
&= 10\angle\left(-60^\circ\right)\\
&= 10\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

略解

$$\begin{aligned}
5-5\sqrt{3}\mathrm{i} &= 5\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\\
&= 5\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\\
&= 5\sqrt{4}\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{4}}\right)\\
&= 10\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\
&= 10\left(\cos\left(-60^\circ\right)+\mathrm{i}\sin\left(-60^\circ\right)\right)\\
&= 10\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-60^\circ)}\\
&= 10\angle\left(-60^\circ\right)\\
&= 10\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
5\,\mathrm{i} &= 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}90^\circ}\\
&= 5\angle 90^\circ\\
&= 5\angle\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



5i在虚数轴上

另解

$$\begin{aligned}
5\mathrm{i} &= 5\left(0+\mathrm{i}\right)\\
&= 5\left(\cos 90^\circ+\mathrm{i}\sin 90^\circ\right)\\
&= 5^{\mathrm{i}90^\circ}\\
&= 5\angle 90^\circ\\
&= 5\angle\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$(5)\quad -1+\mathrm{i} = \sqrt{(-1)^2+1^2}\,e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)}$$

$$= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\tan^{-1}(-1)}$$

$$= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}135^\circ}$$

$$= \sqrt{2}\angle 135^\circ$$

$$= \sqrt{2}\angle\frac{3}{4}\pi$$

別解

$$-1+\mathrm{i} = \sqrt{(-1)^2+1^2}\,\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + \mathrm{i}\sin 135^\circ)$$

$$= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}135^\circ}$$

$$= \sqrt{2}\angle 135^\circ$$

$$= \sqrt{2}\angle\frac{3}{4}\pi$$

$$(6)\quad -\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}\,e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}}\times\frac{3}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1+3}{9}}\,e^{\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}}\,e^{\mathrm{i}\tan^{-1}(\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2}{3}e^{\mathrm{i}240^\circ}$$

$$= \frac{2}{3}\angle 240^\circ$$

$$= \frac{2}{3}\angle\frac{4}{3}\pi$$

另解

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} &= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\left(\frac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}{\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}\left(\frac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}{\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{1+3}{9}}\left(\frac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}{\sqrt{\dfrac{1+3}{9}}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{4}{9}}\left(\frac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}{\sqrt{\dfrac{4}{9}}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}{\dfrac{2}{3}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}{\dfrac{2}{3}}\times\frac{3}{3}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-1-\dfrac{3}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}{2}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\
&= \frac{2}{3}(\cos 240^\circ+\mathrm{i}\sin 240^\circ)\\
&= \frac{2}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}240^\circ}\\
&= \frac{2}{3}\angle 240^\circ\\
&= \frac{2}{3}\angle\frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

(7) $$\begin{aligned} 3e^{\frac{\pi}{4}i} &= 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \\ &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 3\frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3+3i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(8) $$\begin{aligned} 6e^{\frac{\pi}{3}i} &= 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 6(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \\ &= 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 3 + 3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

(9) $$\begin{aligned} 2e^{\frac{\pi}{6}i} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned} \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i} &= \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \sqrt{3}\left[\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)\right] \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

CHAPTER 04

第4章

把指数函数和复数联系在一起的欧拉公式

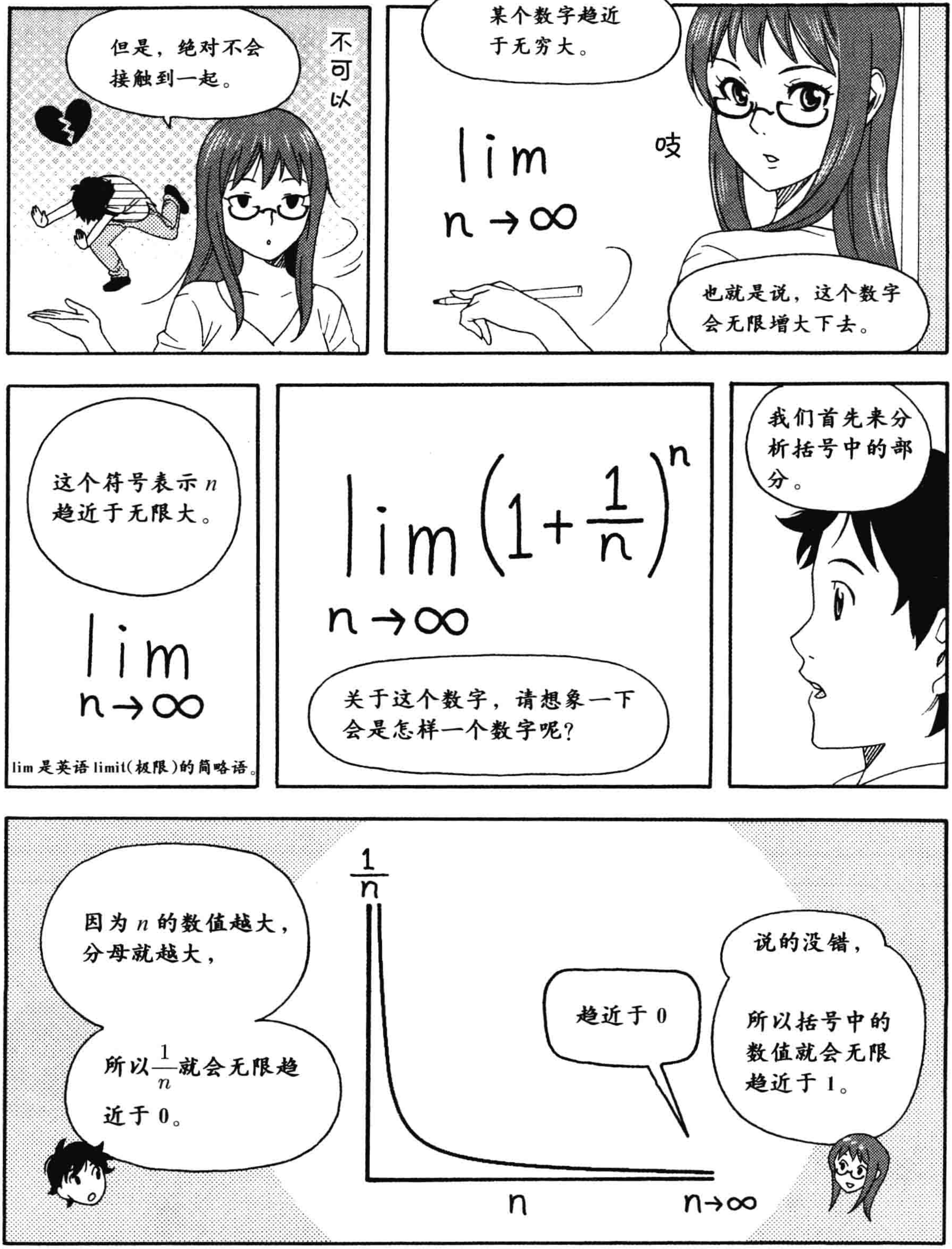
1. 欧拉公式

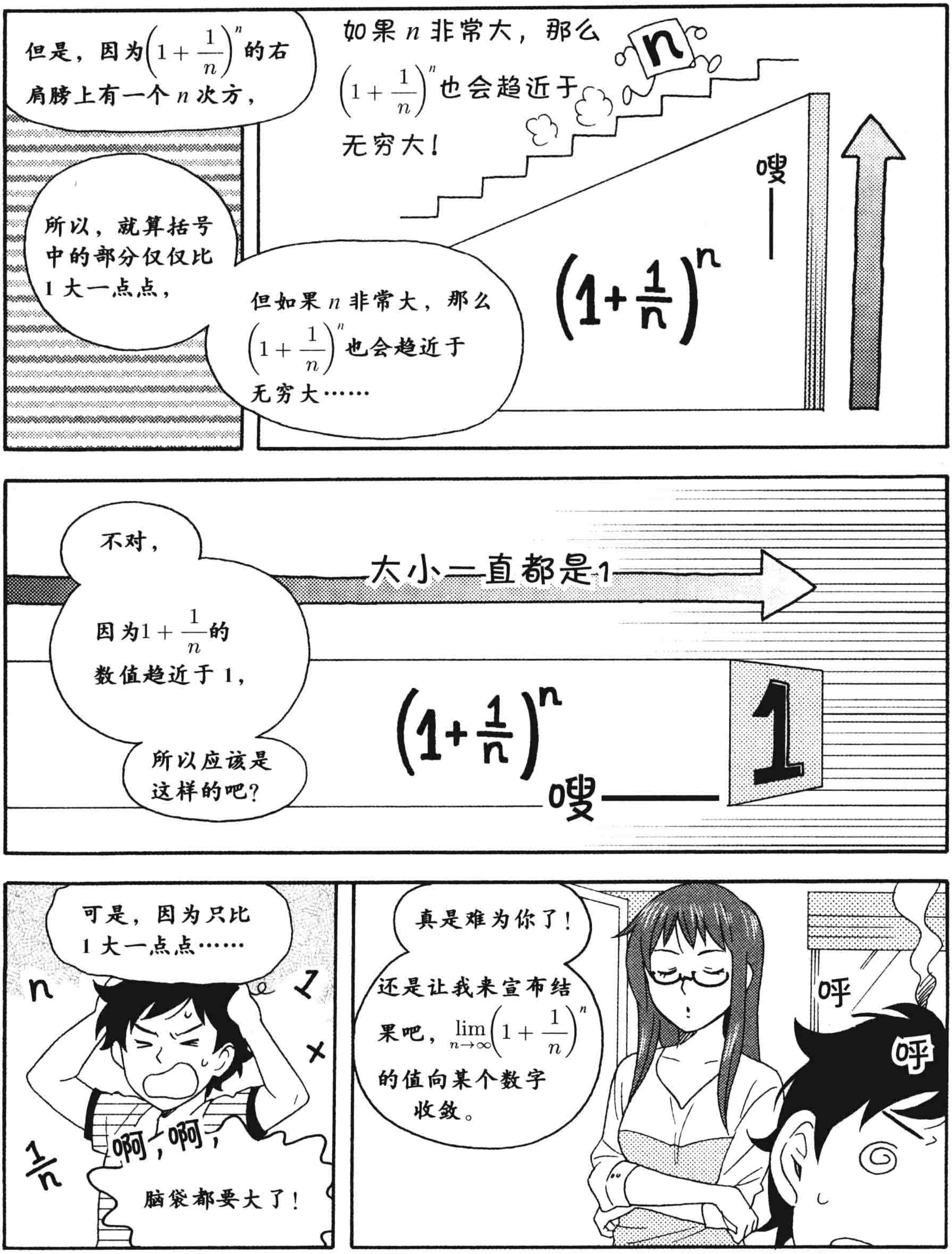

摩拳擦掌
吱
这就是欧拉公式啦！
嘭
$e^{i\pi}+1=0$
咚
怎么样？是不是特别美丽啊？
你在犯什么傻？
喂，请好好观察这个公式！

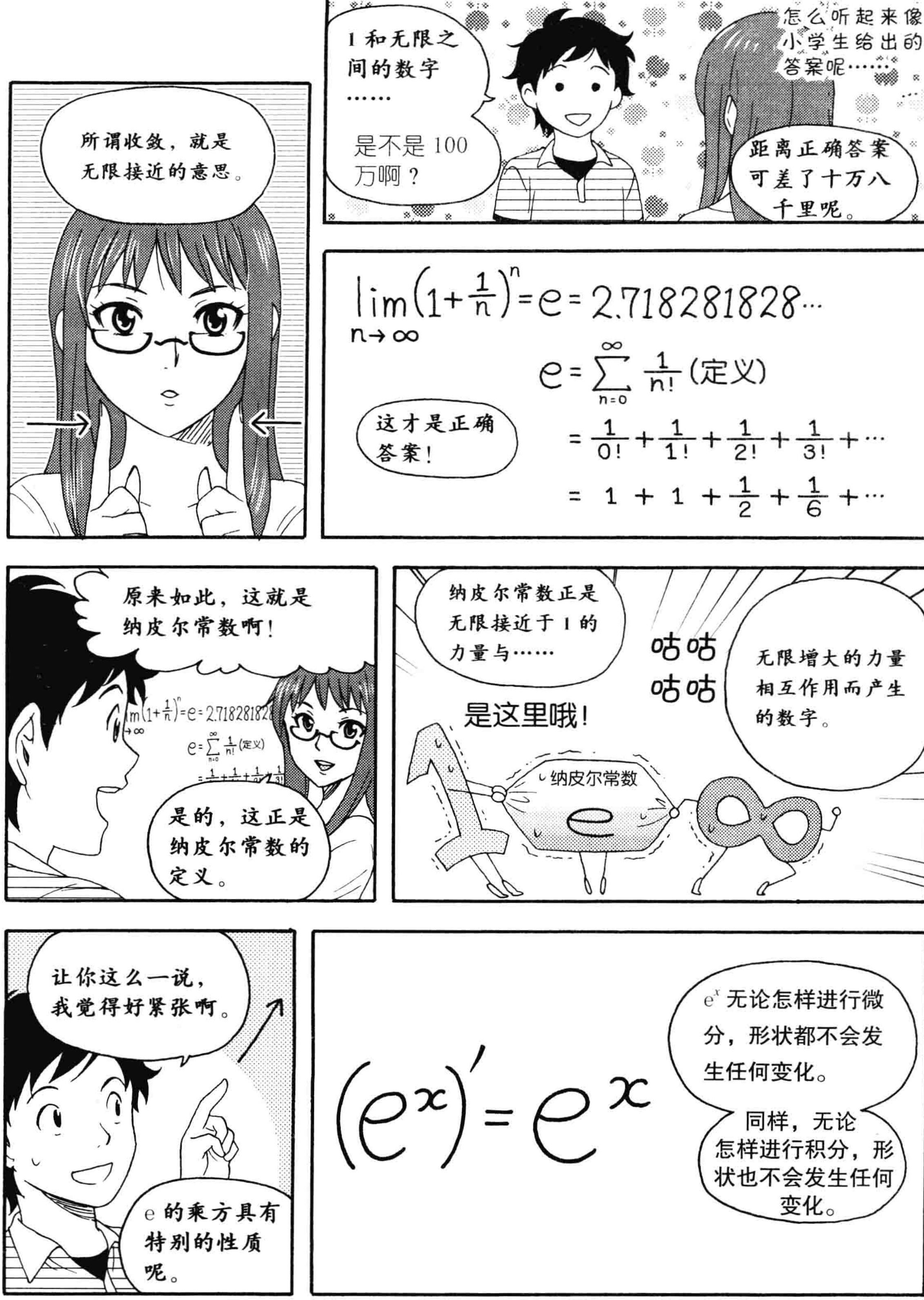

是不是非常美丽？
微笑
嗯
是，是……
非常美丽。
我指的是你！
有没有看出来什么不对劲儿的地方？
？
啊，没有，那个……
怎么说呢……
3个来路不明的数字组合在一起之后……
$e^{i\pi}+1=0$
和1凑在一起就变成了0，还真展示了非凡的魄力呢！
是吧？纳皮尔常数e、圓周率π和虚数i……
分别在完全不同的情况下被人类所创造出来的3个数字，在这里变成了一个数字，
而且表现形式还如此得简捷！

右侧是欧拉公式的一般表现形式。
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
当 $\theta=\pi$ 〔rad〕时，欧拉公式就变成了刚才那个形式。
吱
这是因为当 $\theta=\pi$ 时，$\cos\theta$ 等于 -1，而 $\sin\theta$ 等于 0 的缘故啊。
当 $\theta=\pi$ 时的示意图
$\theta=\pi$〔rad〕
右边怎么变成了复数呢？
你发现了一个很不错的问题呢。
欧拉公式正是把指数函数和复数联系在一起的公式。
说到这里我还想起一个问题，我们在学习虚数的时候也出现过欧拉公式呢。
是的，是的，但这里出现的欧拉公式变得有点儿复杂了，可要把它们分清楚哦。

2. 纳皮尔常数（自然对数的底）e

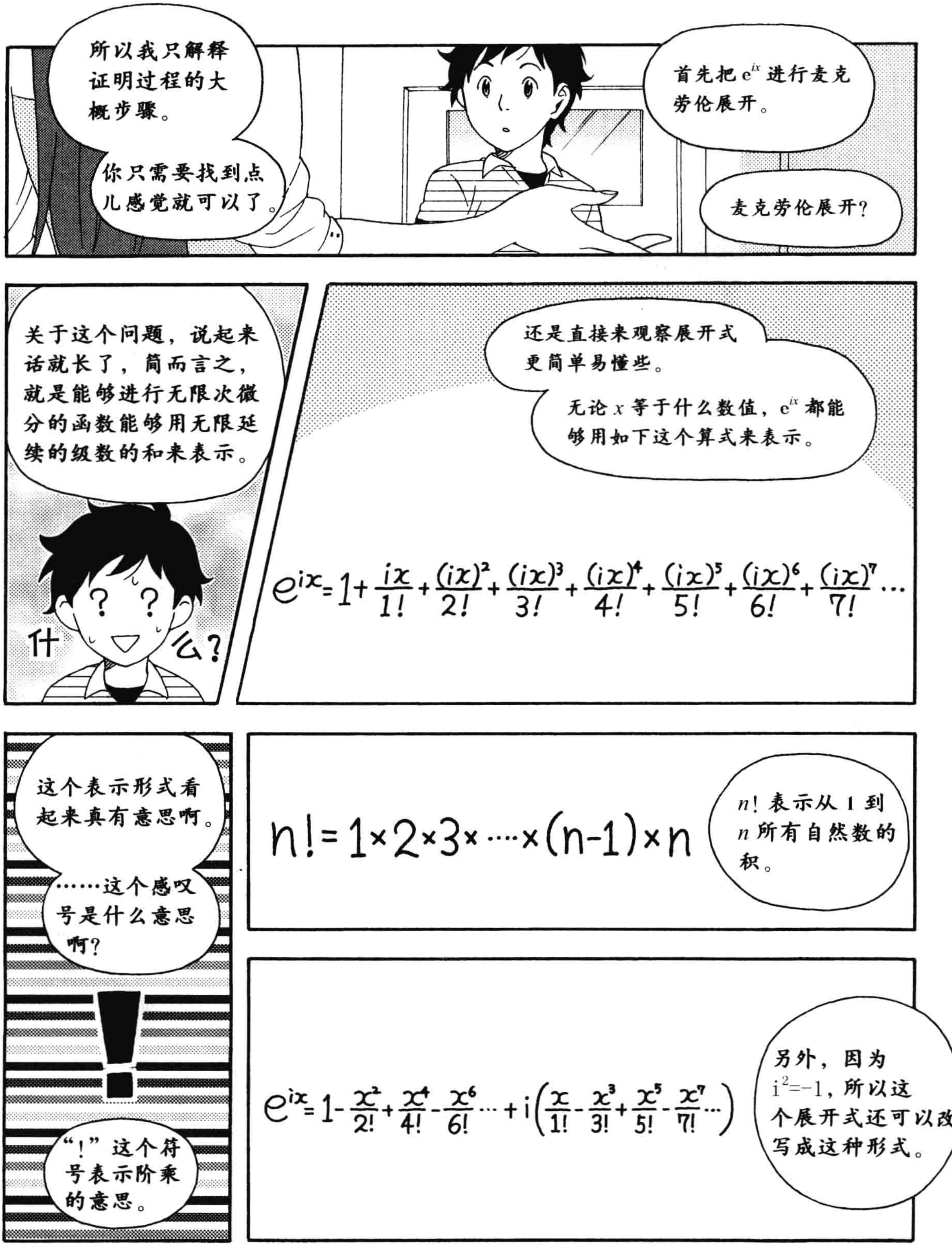

但是，绝对不会接触到一起。
不可以
某个数字趋近于无穷大。
$\lim_{n \to \infty}$
吱
也就是说，这个数字会无限增大下去。
这个符号表示 n 趋近于无限大。
$\lim_{n \to \infty}$
lim 是英语 limit(极限)的简略语。
$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
关于这个数字，请想象一下会是怎样一个数字呢？
我们首先来分析括号中的部分。
因为 n 的数值越大，分母就越大，
所以 $\frac{1}{n}$ 就会无限趋近于 0。
$\frac{1}{n}$
趋近于 0
n
$n \to \infty$
说的没错，
所以括号中的数值就会无限趋近于 1。


但是，因为$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的右肩膀上有一个 n 次方，
如果 n 非常大，那么$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$也会趋近于无穷大！
n
嗖——
$(1+\frac{1}{n})^n$
所以，就算括号中的部分仅仅比 1 大一点点，
但如果 n 非常大，那么$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$也会趋近于无穷大……
不对，
大小一直都是1
因为$1+\frac{1}{n}$的数值趋近于 1，
所以应该是这样的吧？
$(1+\frac{1}{n})^n$
嗖——
1
可是，因为只比 1 大一点点……
n
1
×
$\frac{1}{n}$
啊，啊，
脑袋都要大了！
真是难为你了！
还是让我来宣布结果吧，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的值向某个数字收敛。
呼
呼



1和无限之间的数字……
是不是100万啊？
怎么听起来像小学生给出的答案呢……
距离正确答案可差了十万八千里呢。
所谓收敛，就是无限接近的意思。
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.718281828\cdots$
$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (定义)
$=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$
$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots$
这才是正确答案！
原来如此，这就是纳皮尔常数啊！
是的，这正是纳皮尔常数的定义。
纳皮尔常数正是无限接近于1的力量与……
咕咕
咕咕
无限增大的力量相互作用而产生的数字。
是这里哦！
纳皮尔常数
让你这么一说，我觉得好紧张啊。
e的乘方具有特别的性质呢。
$(e^x)'=e^x$
e^x 无论怎样进行微分，形状都不会发生任何变化。
同样，无论怎样进行积分，形状也不会发生任何变化。

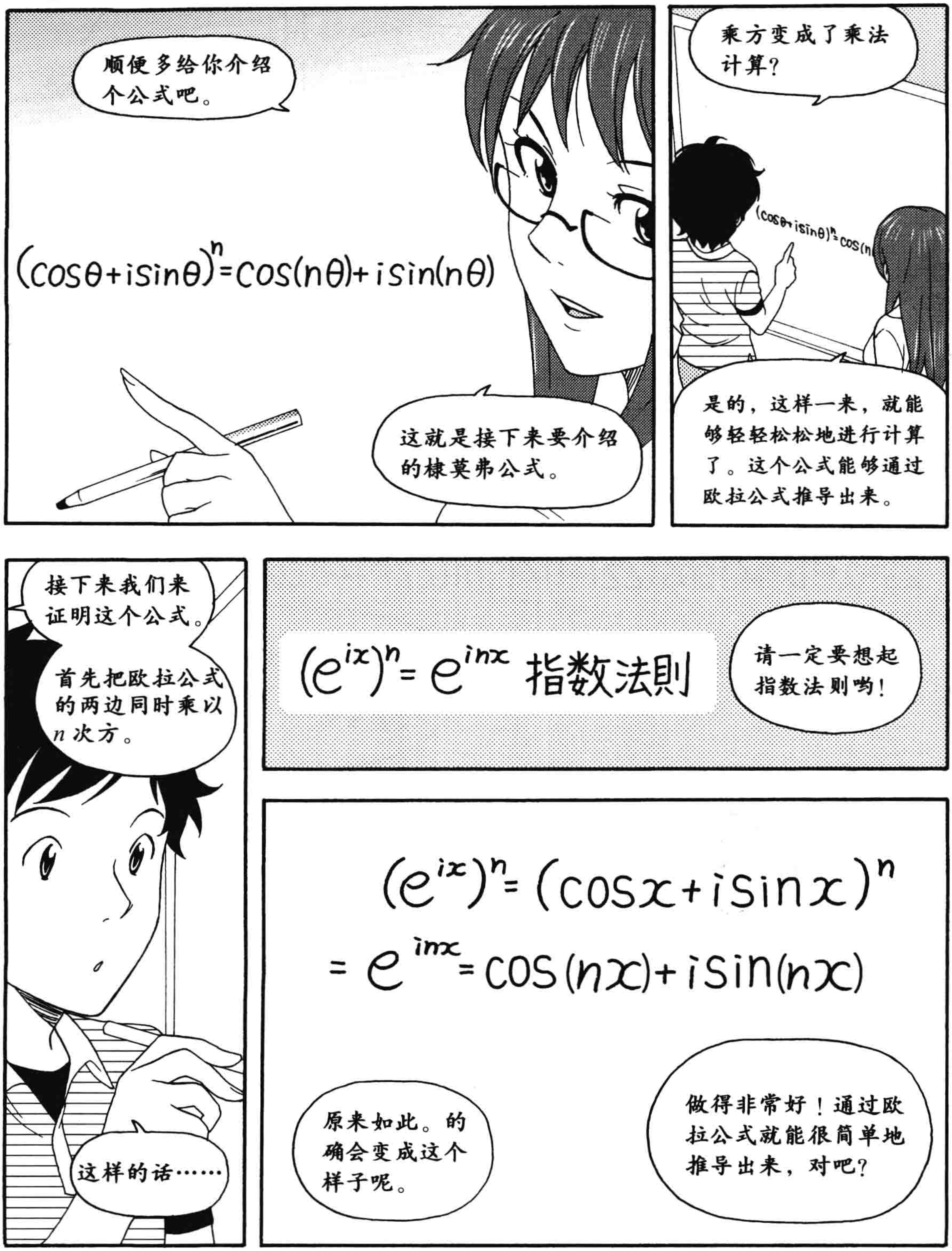

这个很了不起吗？
是很了不起哦！
例如，接下来我们分析把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 进行微分和积分的情况看看。
$\int y dx=\int(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+cx+d$
用 x 进行积分的情况
$y=ax^2+bx+c$
用 x 进行微分的情况
$y'=2ax+b$
（d 是被称作积分常数的任意实数）
接下来是 $y=e^x$ 微分和积分的情况
$\int y dx=\int e^x dx=e^x+d$
用 x 进行积分的情况
$y=e^x$
用 x 进行微分的情况
$y'=e^x$
（※ 只是，积分的结果中出现了积分常数，d 是积分常数）
用 x 进行微分和积分后，其形状保持不变，这一性质非常便利，经常被用到哦。
原理如此！
3. 欧拉公式的证明
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
好了，关于纳皮尔常数我们已经知道是怎么回事儿了，接下来我们再回到欧拉公式上来吧。
欧拉公式虽然看起来非常简单，但证明起来却非常复杂。
唉
就连冰室小姐都说复杂的话，那一定是非常非常复杂了啊！



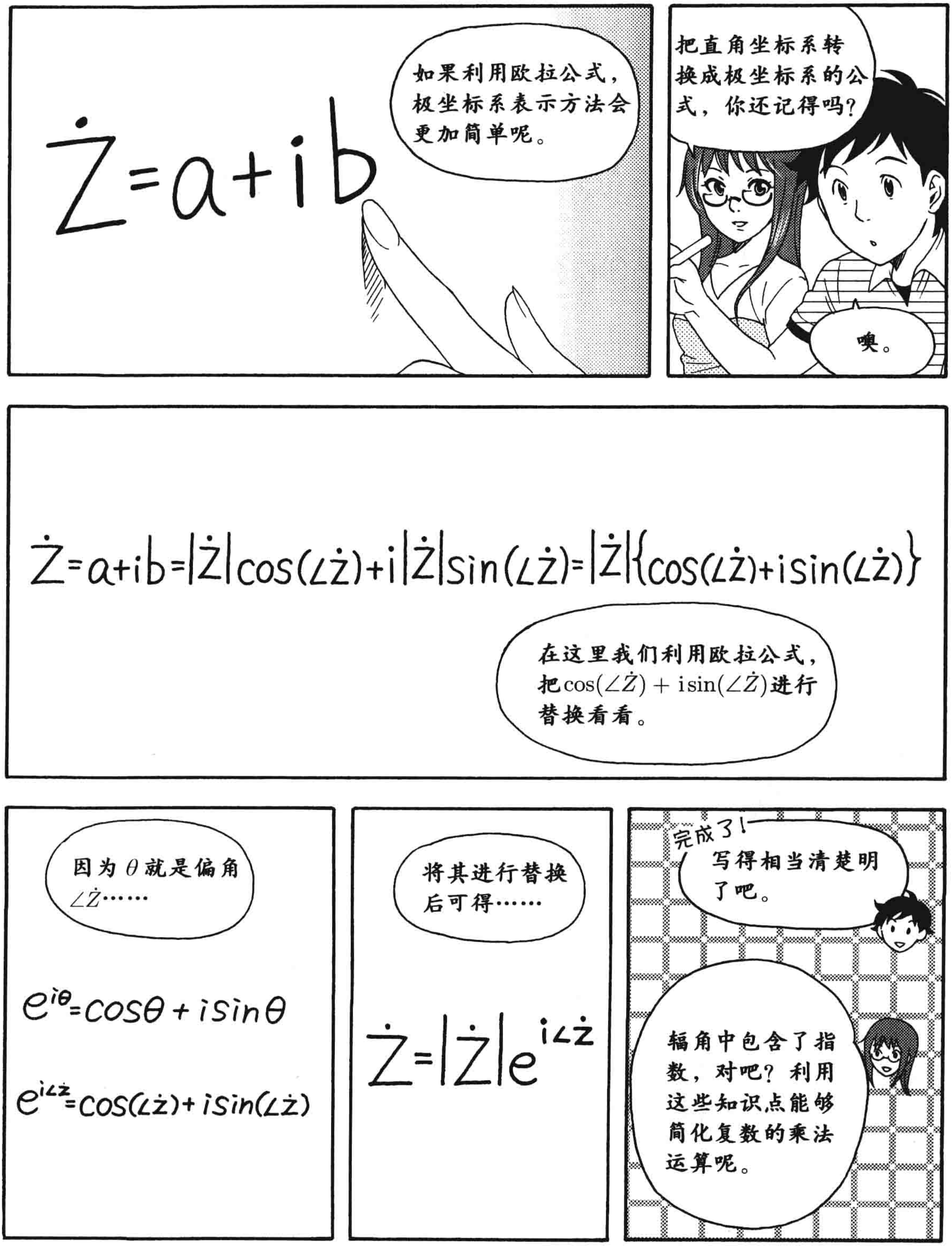
所以我只解释证明过程的大概步骤。
你只需要找到点儿感觉就可以了。
首先把 e^{ix} 进行麦克劳伦展开。
麦克劳伦展开？
关于这个问题，说起来话就长了，简而言之，就是能够进行无限次微分的函数能够用无限延续的级数的和来表示。
什么？
还是直接来观察展开式更简单易懂些。
无论 x 等于什么数值，e^{ix} 都能够用如下这个算式来表示。
$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^7}{7!}\cdots$
这个表示形式看起来真有意思啊。
……这个感叹号是什么意思啊？
！
“！”这个符号表示阶乘的意思。
$n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$
n！表示从1到 n 所有自然数的积。
$e^{ix}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots\right)$
另外，因为 $i^2=-1$，所以这个展开式还可以改写成这种形式。

如果指数是奇数，
那么 i 就会留存下来，
如果指数是偶数，
那么 i 就会消失呢。
$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots$
$i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots\right.$
下面是把 cos$x$ 和 sin$x$ 进行麦克劳伦展开后的表达式。
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots$
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots$
cos 的展开式中出现的是偶数，sin 的展开式中出现的是奇数，真是不可思议啊。
不要瞎感慨了，请把这个展开式跟 e^{ix} 的麦克劳伦展开式进行比较看看。
$e^{ix}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots\right)$
请看！
啊！难道……
能够把 cos$x$ 和 sin$x$ 代入吗？
说的没错！代入后表达式如下所示。
$e^{ix}=\cos x+i\sin x$
吱
再次回到了欧拉公式啊！
总觉得是通过虚数把 e^{ix} 和三角函数联系起来了呢。
虚数
e^{ix}
三角函数
真不容易，恭喜你啊！
我好像终于找到点儿感觉了。

4. 棣莫弗公式


顺便多给你介绍个公式吧。
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
这就是接下来要介绍的棣莫弗公式。
乘方变成了乘法计算？
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n$
是的，这样一来，就能够轻轻松松地进行计算了。这个公式能够通过欧拉公式推导出来。
接下来我们来证明这个公式。
首先把欧拉公式的两边同时乘以 n 次方。
$(e^{ix})^n=e^{inx}$ 指数法则
请一定要想起指数法则哟！
$(e^{ix})^n=(\cos x+i\sin x)^n$
$=e^{inx}=\cos(nx)+i\sin(nx)$
这样的话……
原来如此。的确会变成这个样子呢。
做得非常好！通过欧拉公式就能很简单地推导出来，对吧？

5. 利用指数的极坐标表示方法




太好了！
按照这个节奏进展下去，很快我就能全学会了。
呼啦啦啦啦
……
那我们明天再继续吧。
咔嚓
啊，冰室小姐，
那个……要是你有空的话……
服务员招聘
特色拉面
风味堂
面
欢迎光临
拉面
拉面
大碗拉面
风味拉面
叉烧面
5倍！
拉面
拉面
大碗拉面
这就是我之前跟你提起过的拉面馆，味道怎么样？
叉烧面
5倍！
呼呼
刚吃第一口，味道还不错。
眼镜上一层雾啊。


哎呀，这个拉面太好吃了！
啾啾
啾啾
啾啾
啾啾
啾啾
啾啾
啾
冰室小姐！我明天也会努力学习的！
嗯？
啊，啊……可是，你总是没什么毅力呢。
咔
我喜欢的那个人总是废寝忘食地学习数学，把眼睛都累坏了。
什么？冰室小姐的……
刚才你说什么来着？
我说学习太过努力，眼睛都……
这句之前那句。
啪啪
啪啪
我喜欢的人……
再见了，青春……
特色拉面
风味堂
味
优太？你的拉面都凉了！

6. 微分的定义和纳皮尔常数的微分

纳皮尔常数的定义式是 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，假设 $h=\dfrac{1}{n}$，那么 $n=\dfrac{1}{h}$，所以 $n\to\infty$ 可以改写成 $h\to0$。所以可得 $\mathrm{e}=\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$。接下来我们通过微分的定义式来分析 e^x 的微分。首先，我们用 $f(x)$ 来表示这个函数。那么，函数 $f(x)$ 的微分（导函数）可以用以下算式来定义。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

将 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 代入上述算式可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=(\mathrm{e}^x)'\\&=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^{(x+h)}-\mathrm{e}^x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h-1)}{h}\\&=\mathrm{e}^x\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}\end{aligned}$$

（因为 e^x 与 h 毫无关系，所以便把 lim 去除掉了。）接下来，我们把 e 的定义式变形后得到的等式 $\mathrm{e}=\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ 两边求自然对数（log 的底是 e）并进行计算（关于对数函数的计算请参考第 159 页的详细说明）。

$$
\begin{aligned}
\log_e e &= 1 \\
&= \log_e \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \log_e (1+h)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_e (1+h) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h}
\end{aligned}
$$

也就是说，$\lim_{h\to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1$成立。另外，根据这个公式可知，如果$1+h=e^t$，那么$h = e^t - 1$，当$h \to 0$时，因为$e^0 = 1$，所以$t \to 0$。

代入$\lim_{h\to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1$可得

$$
\lim_{t\to 0} \frac{\log_e e^t}{e^t - 1} = 1
$$

因为$\lim_{t\to 0} \frac{t \log_e e}{e^t - 1} = 1$，而且$\log_e e = 1$，所以$\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$成立。

将等式两边的分子分母进行替换（计算倒数）后可得

$$
\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x)' \\
&= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

成立，由此可见，就算进行微分，e^x的形状不会发生任何变化。

7. 纳皮尔常数应用在实际生活中的例子

关于刚刚学习过的纳皮尔常数，它跟我们的实际生活有着千丝万缕的联系，接下来就通过举例来进行说明。现在，假设我们在银行有 1000 万日元的存款，年利率是 3%，那么一年后我们能获得多少钱？

答案是 1000 万日元 ×（1+0.03）=1030 万日元

如果把这 1030 万日元再续存一年，共计存款 2 年的话，能获得多少钱呢？已经获得的利息加上本金后还会产生利息，这样来计算复利就能得到答案。

答案是 1030 万日元 ×（1+0.03）=1000 万日元 ×（1+0.03）(1+0.03）

=1000 万日元 ×（1+0.03）^{2}

=1060.9 万元

如果把这 1060.9 万元再续存一年，共计存款 3 年的话，能得到多少钱呢？

答案是 1060.9 万日元 ×（1+0.03）=1000 万日元 ×（1+0.03）^{2}（1+0.03）

=1000 万日元 ×（1+0.03）^{3}

=1092.727 万日元

如果续存 N 年，那么 N 年后能获得多少钱呢？

答案是 1000 万日元 ×（1+0.03）^{N}

10 年后，也就是 N=10, 通过计算可知我们能获得 1343.9163 万日元。

通过跟银行交涉，银行同意我们半年可以取一次利息。半年期的话，当然是年利率的一半，也就是 1.5%，但一年当中我们能够获取两次利息。所以，通过计算复利可知，1 年后我们能获得

1000 万日元 ×（1+0.03/2）(1+0.03/2）=1000 万日元 ×（1+0.03/2）^{2}

=1030.225 万日元

2 年后可获得

1000 万日元 ×（1+0.03/2）^{4}=1061.3635 万日元

3 年后可获得

1000 万日元 ×（1+0.03/2）^{6}=1093.4432 万日元

按照半年计算利息，N 年后可获得

$$1000\text{ 万日元} \times (1+0.03/2)^{2N}$$

10 年后，也就是 $N=10$, 通过计算可知我们能获得 1346.8550 万日元。

与按照年度计算利息相比，虽然差不多，但按照半年计算利息，金额会有所增加。

如此一来，假设按照 3 个月期限来计算利息，因为 3 个月是一年的四分之一，那么利息应该是年利息的 $\frac{1}{4}$，1 年当中能够领取 4 次利息。计算复利可得

1 年后，1000 万日元 $\times$ $(1+0.03/4)^4$=1030.3391 万日元

2 年后，1000 万日元 $\times$ $(1+0.03/4)^8$=1061.5988 万日元

3 年后，1000 万日元 $\times$ $(1+0.03/4)^{12}$=1093.8068 万日元

N 年后是 1000 万日元 $\times$ $(1+0.03/4)^{4N}$

10 年后就是 1348.3486 万日元

由此可知，这比按照半年期限计算利息金额又有所增加。

将以上计算结果用表格表示则如下表所示。

	1 年中领取利息的次数	1 年后（万日元）	2 年后（万日元）	3 年后（万日元）	10 年后（万日元）
年利率（3%）	1	1030	1060.9	1092.727	1343.9163
半年利息（1.5%）	2	1030.225	1061.3635	1093.4432	1346.8550
季度利息 $\left(\frac{3}{4}\%\right)$	4	1030.3391	1061.5988	1093.8086	1348.3486

领取利息的期限越短，能够领取到的金额就会稍微有所增加。

那么，如果领取利息的期限无限缩短下去，是不是能够领取的金额也会无限增加下去呢？反正在这个世界上，绝对不可能有这样的好事儿。就算领取利息的期限无限缩短下去，能够领取的金额也只会向某个数值收敛。到底向哪个数值收敛，我们能够通过计算得出。在刚才所列举的例子中，我们省略掉 1000 万日元的部分，只分析 $(1+0.03/n)^{nN}$ 这部分，只要将 n 无限增大就可以了。

已知$\left(1+\frac{0.03}{n}\right)^{nN}=\left(1+\frac{0.03}{n}\right)^{\frac{n}{0.03}0.03N}$成立，

假设$\frac{0.03}{n}=\frac{1}{h}$，那么$\frac{n}{0.03}=h$成立。

最后，假设 $0.03N=T$, 那么$\left(1+\frac{1}{h}\right)^{hT}$成立。

因为 $n=0.03h$, 如果 n 是无限的，那么 h 也是无限的。

请回忆起来刚才当 n 无限大时的那个假想试验。也就是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$。

这次，因为 h 是无限大的，所以可得$\lim\limits_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{hT}$。

所以

$$\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{hT}=\left\{\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}\right\}^{T}=\mathrm{e}^{T}$$

成立。出乎意料的是，自然对数的底（纳皮尔常数 e）还能够应用在计算利息当中，当获取利息的期限无限缩短时，计算利息增加的数额就需要用到这个数字。实际上，这在现实生活中是不可能实现的，因为获取利息的期限根本不可能无限缩短。

CHAPTER 05

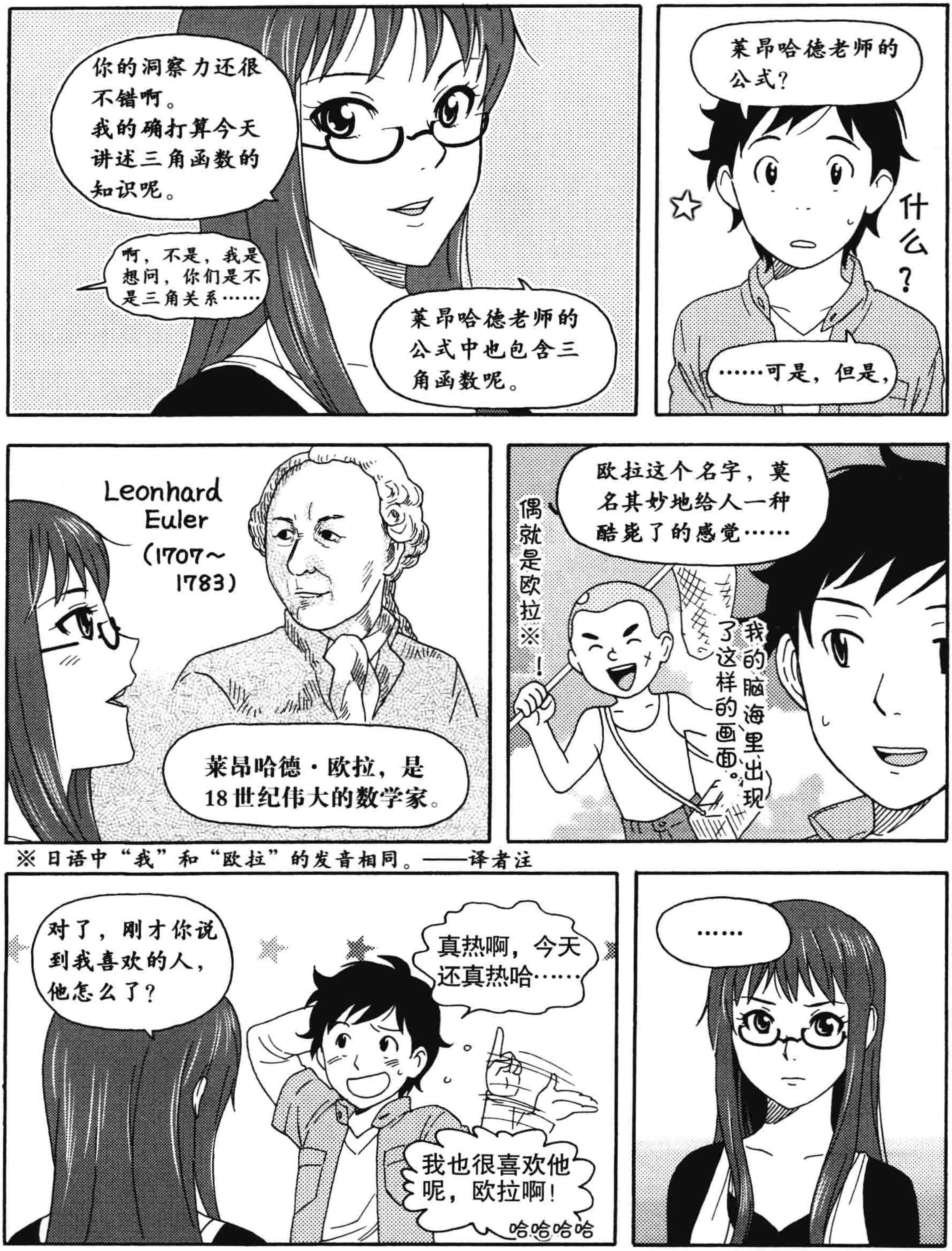
第5章

欧拉公式和三角函数的加法定理


喂，听说“数学女王”正在单相思呢，
好像是真的，真是不可思议。
咔
嘭
你知道了怎么不早点告诉我啊。这么重要的事情！
咔嚓
吧嗒
这也是没办法的事情啊！何况，这只不过是类似玩笑的传闻罢了。
据说暗恋的对象好像是一个叫什么莱昂哈德的外国人呢。
想象图
光听名字就知道一定长得很帅……
据说那个人还是个数学天才。
想象图
深奥的数学书籍
你说的这些我才不信呢……
笨蛋，傻瓜！
你还是适可而止，放弃算了。
师兄……


我反正已经放弃了。
焦躁不安
……我先走了。
咔嚓
别生气啊，我请你吃饭还不行吗？
哎呀，这是冰室小姐的讲义！
废纸类垃圾
明明没有任何胜算，我还要去吗？
或许在感情方面我是真的没有任何胜算，
但既然坚持到了现在，对虚数和复数的学习我可不能半途而废啊！
还真有点勇气呢！
酷毙了！
销售中
奶油大麦茶！
我真不能再继续这样稀里糊涂下去了……
干脆去找冰室小姐问清楚吧！


冰室研究室
你好……
欢迎你，优太。
嘭
那、那个，冰室小姐……
扑通扑通扑通扑通（心跳）
我想问你个问题……
扑通扑通扑通
扑通扑通扑通
你之前有说过你喜欢的那个人……
嗯？
啊，啊，你说的是莱昂哈德老师吧？
咕咚
我只是说过，我在单相思罢了。
哐当
是三角关系吗……
果然有这个人啊！
而且冰室小姐还尊称他为老师!？
莱昂哈德老师
哈哈！想象图

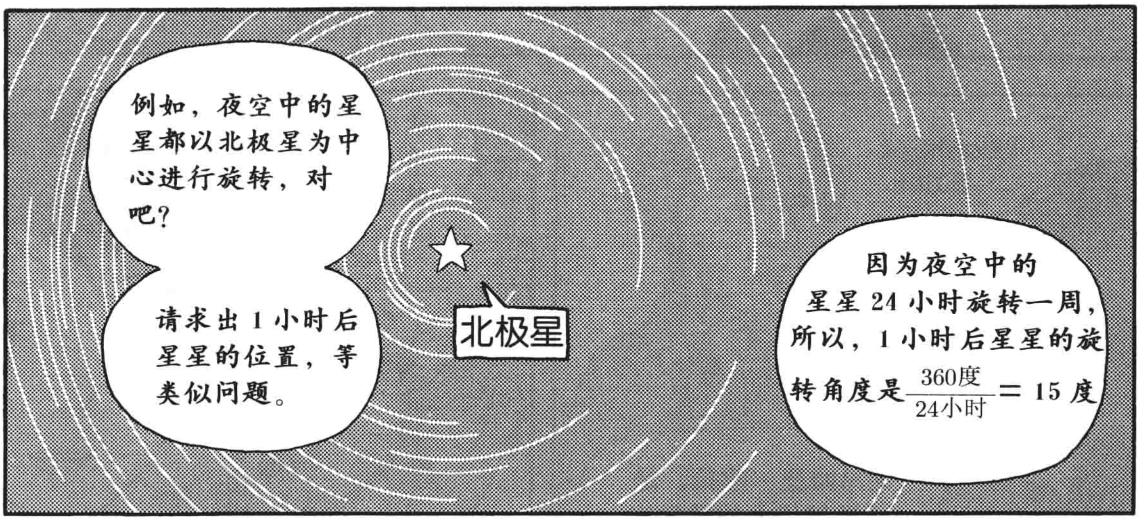


※日语中“我”和“欧拉”的发音相同。——译者注

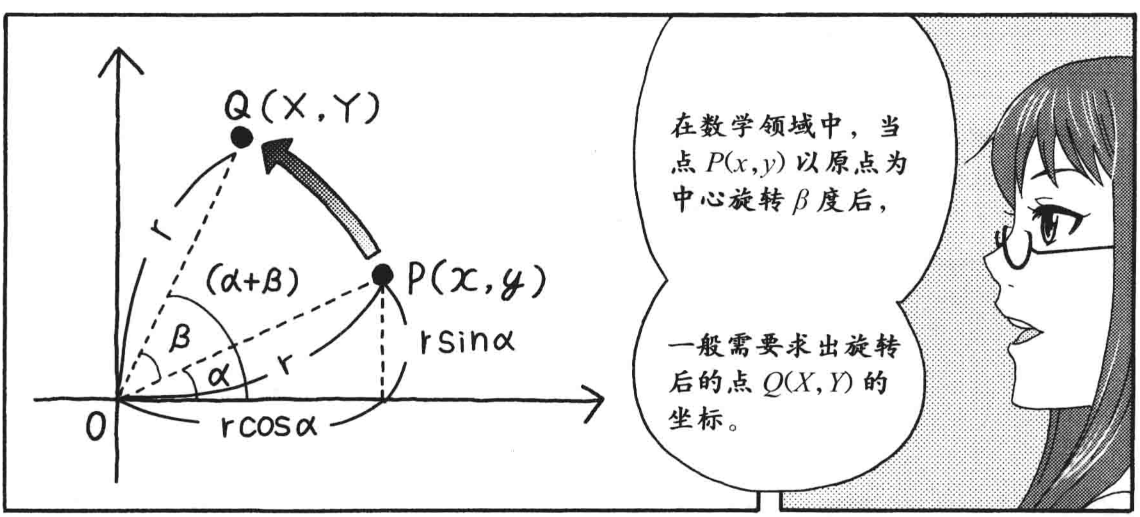
1. 三角函数的加法定理

首先，我们来分析平面上的旋转。
心旷神怡般
大麦茶
美味

旋转吗？



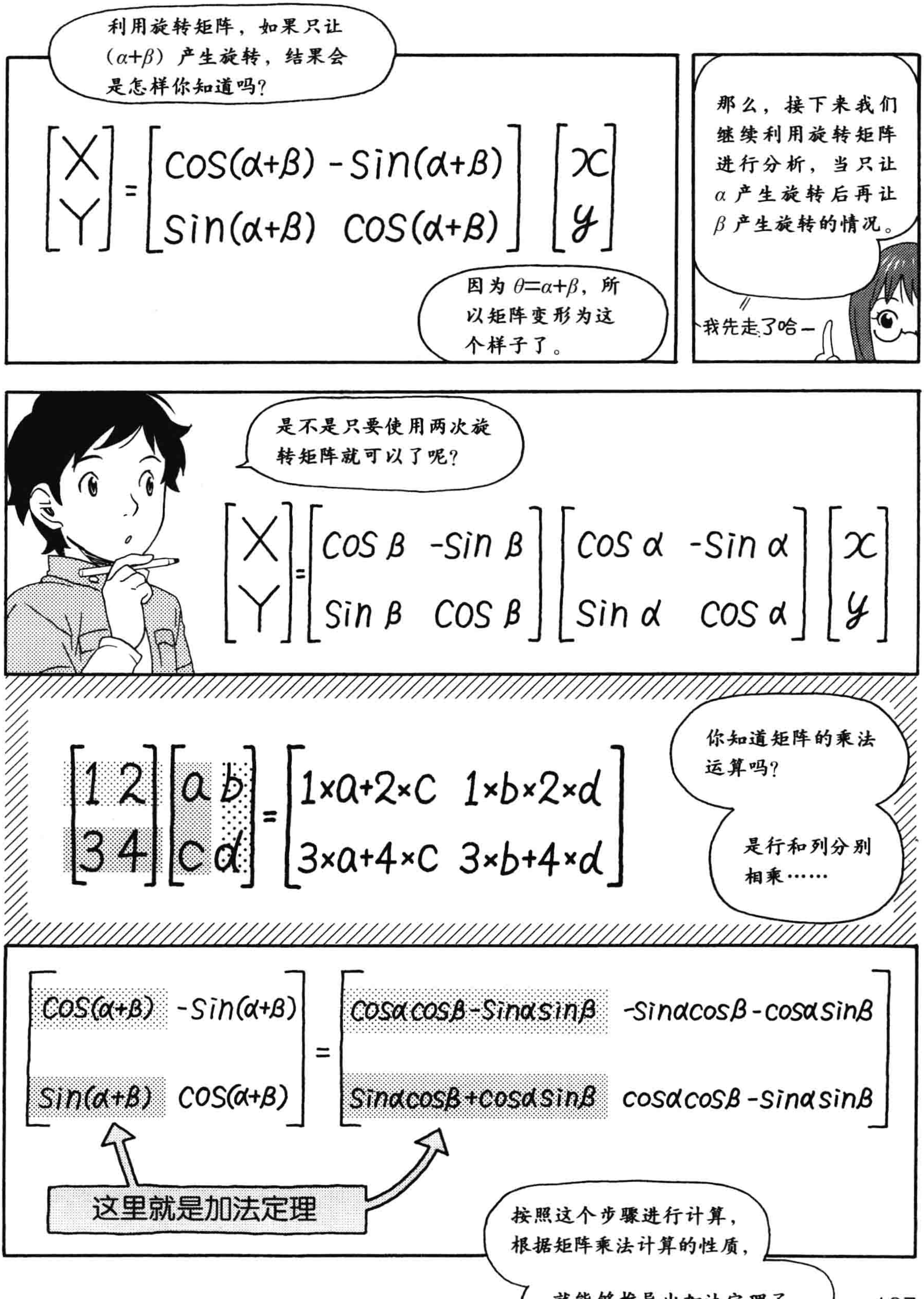
例如，夜空中的星星都以北极星为中心进行旋转，对吧？
请求出 1 小时后星星的位置，等类似问题。
北极星
因为夜空中的星星 24 小时旋转一周，所以，1 小时后星星的旋转角度是 $\frac{360度}{24小时} = 15$ 度



Q(X, Y)
r
(α+β)
P(x, y)
β
α
r
rsinα
O
rcosα
在数学领域中，当点 $P(x, y)$ 以原点为中心旋转 β 度后，
一般需要求出旋转后的点 $Q(X, Y)$ 的坐标。

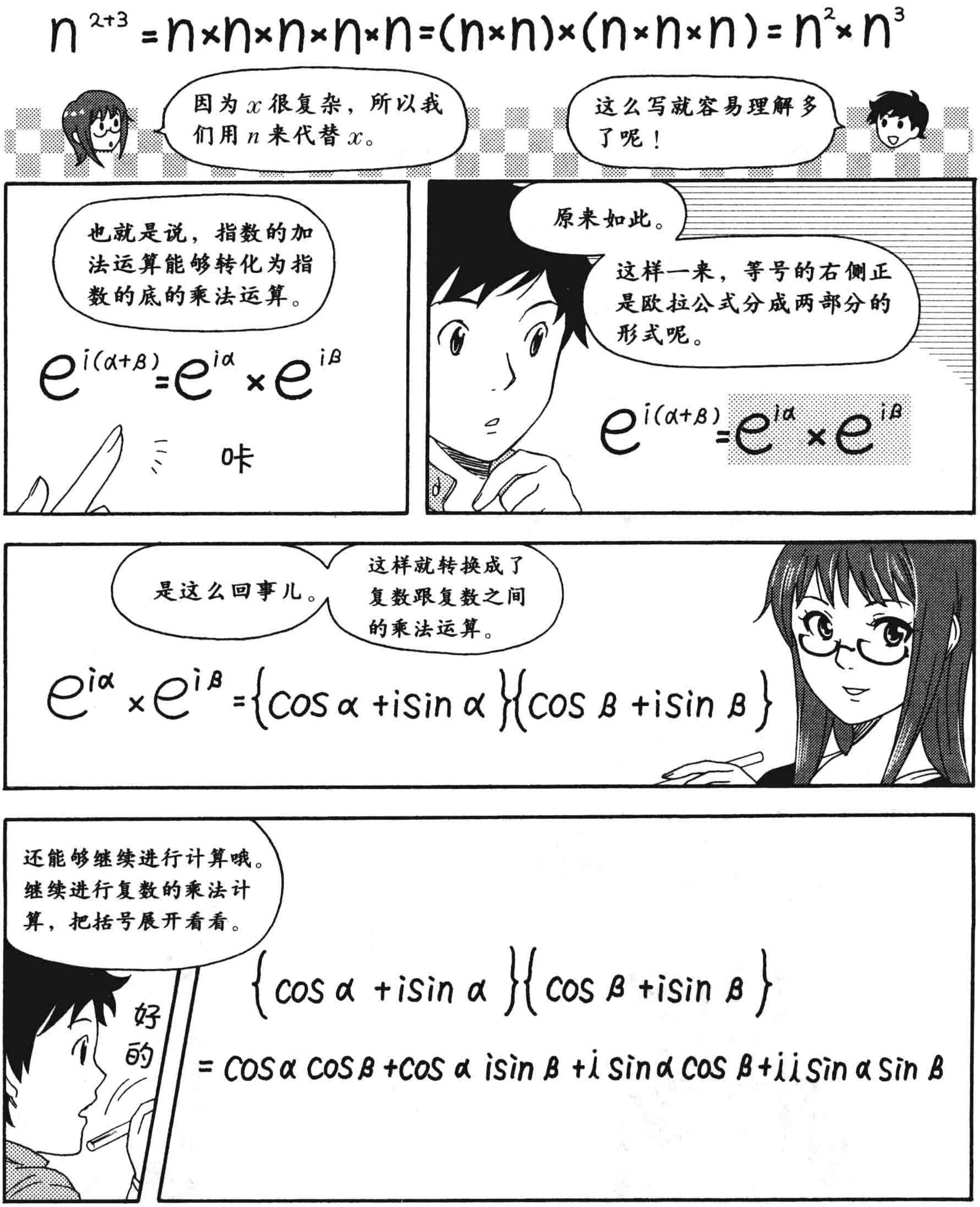

我们尝试在直角坐标系中把点$P(x,y)$和移动后的点$Q(X,Y)$画出来。
假设点P距离原点的距离为r，因为所形成的角度分别是α和β……
$x=r\cos\alpha \quad y=r\sin\alpha$
$X=r\cos(\alpha+\beta) \quad Y=r\sin(\alpha+\beta)$
可以这样分析吧？
完全正确！
对了，你还记得三角函数的加法定理吗？
这在高中数学中应该学过了。
我总觉得好像在很久很久以前学过似的……
吱
稀里糊涂
你总这么一副似懂非懂的模样！
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
这就是加法定理的公式。
因为马上就能推导出来，所以都不需要进行特别记忆。
请利用加法定理，分别求出X和Y的表达式。
是！
$X=r(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$
$Y=r(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$
求出来了！


回答正确。然后将 x 和 y 分别代入这个表达式中。
嘶
$X=r\cos\alpha\cos\beta-r\sin\alpha\sin\beta$
$Y=r\sin\alpha\cos\beta+r\cos\alpha\sin\beta$
首先把括号内的两部分同时乘以 r，便可以去掉括号……
因为 $x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha$
$X=x\cos\beta-y\sin\beta$
$Y=y\cos\beta+x\sin\beta$
所以变形成这样了呢。
做得非常好。接下来请把这个表达式用矩阵的形式表示出来。
在这里用 θ 代替了 β，这被称作旋转矩阵。
乘以旋转矩阵后，还能够求出旋转后的坐标呢。
$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
相反，只要记住了这个旋转矩阵，也能够推导出加法定理。
与通过加法定理来进行旋转计算相比，利用这个矩阵来进行旋转计算更简单方便呢。



利用旋转矩阵，如果只让（$\alpha+\beta$）产生旋转，结果会是怎样你知道吗？
$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
因为$\theta=\alpha+\beta$，所以矩阵变形为这个样子了。
那么，接下来我们继续利用旋转矩阵进行分析，当只让α产生旋转后再让β产生旋转的情况。
我先走了哈—
是不是只要使用两次旋转矩阵就可以了呢？
$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times a+2\times c & 1\times b\times 2\times d \\ 3\times a+4\times c & 3\times b+4\times d \end{bmatrix}$
你知道矩阵的乘法运算吗？
是行和列分别相乘……
$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$
这里就是加法定理
按照这个步骤进行计算，根据矩阵乘法计算的性质，
就能够推导出加法定理了。

2. 三角函数加法定理的推导方法



$n^{2+3}=n\times n\times n\times n\times n=(n\times n)\times(n\times n\times n)=n^2\times n^3$
因为x很复杂，所以我们用n来代替x。
这么写就容易理解多了呢！
也就是说，指数的加法运算能够转化为指数的底的乘法运算。
$e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}\times e^{i\beta}$
咔
原来如此。
这样一来，等号的右侧正是欧拉公式分成两部分的形式呢。
$e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}\times e^{i\beta}$
是这么回事儿。
这样就转换成了复数跟复数之间的乘法运算。
$e^{i\alpha}\times e^{i\beta}=\{\cos\alpha+i\sin\alpha\}\{\cos\beta+i\sin\beta\}$
还能够继续进行计算哦。继续进行复数的乘法计算，把括号展开看看。
好的
$\{\cos\alpha+i\sin\alpha\}\{\cos\beta+i\sin\beta\}$
$=\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\, i\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta+ii\sin\alpha\sin\beta$

就还差最后一步了。因为ii就是i^2，所以可以写作-1。
然后将实部和虚部分开。
啊，原来如此。
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\}$
然后将其和原来的算式连起来书写可得如下等式。
有什么特别的感觉吗?
$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\}$
啊!
实部和虚部看起来好像是加法定理的内容呢?
因为两个复数被用等号连接在了一起，所以等号右边和左边的实部和虚部应该分别相等才对。
首先，请比较实部看看……


这正是 cos 的加法定理啊。
COS(α+β)=
COSαCOSβ-SinαSinβ
同样来比较虚部看看……
吱
Sin(α+β)=COSα Sinβ+SinαCOSβ =SinαCOSβ +COSα Sinβ
这也正是 sin 的加法定理。
只要记住了欧拉公式，就能够推导出三角函数的加法定理。
咔
这个方法的确是最简单快捷的方法！
在登山的过程中，如果出发点不同，那么沿途的风景也会各不相同，但登上山顶之后所看到的景色却是相同的，对吧？
三角函数的加法定理也跟登山过程相类似。
三角函数的加法定理
线性代数
复数
旋转矩阵
欧拉公式
……好了，接下来我来提问今天的最后一个问题。
咔


优太有喜欢的人了吗？
发表
数学特别演讲会
虚数
讨论会召开
美味
啊!!
怎么突然问这个问题
啊！
扑通扑通
（心跳）
我没别的意思。
优太今天不是也问我这个问题了吗？
扑通
扑通
扑通
扑通
现在……是表白的机会吗！？
可是，我还没做好心理准备呢……
嗯……
如果说有的话，也算有吧。
啊，是吗？那很好啊。
咦？
好了，今天就到此为止吧。
冰室小姐……？
吧嗒
我怎么有点心神不宁呢？
？
？
又惹她生气了？
糟了？……

3. 练习题

> 请求出方程式 $x^3=1$ 的解。因为这是关于 x 的三次函数，所以答案应该有三个。

解答・解析

将 1 移项到方程式的左边，可得

$x^3-1=0$，由此可知 $x=1$ 是方程式的一个解。接下来我们用 $x-1$ 除 x^3-1。

对于 $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 的值，其具体计算方法如下所示。只是有一点请大家注意，①～⑨是为了便于解释说明而追加的内容，跟这个算式的除法计算没有任何关系。

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{①}\quad\text{④}\quad\text{⑦} \\
 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
x-1 \,\big) & x^3+0x^2+0x-1 \\
 & x^3-x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \\ \cline{2-2}
 & \quad x^2+0x \cdots\cdots\cdots \text{③} \\
 & \quad x^2-x \cdots\cdots\cdots\; \text{⑤} \\ \cline{2-2}
 & \qquad x-1 \cdots\cdots \text{⑥} \\
 & \qquad x-1 \cdots\cdots \text{⑧} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 0 \cdots\cdots \text{⑨}
\end{array}
$$

首先，我们把作为被除数的算式看作是 $x^3-1=x^3+0x^2+0x-1$，把作为除数的算式 $x-1$ 写在如上所示的位置。

① 比较除数算式中的项 x^3 和被除数算式 $x-1$，在商的位置写上 x^2。

② 把 $x-1$ 和 x^2 的乘积 x^3-x^2 写在 x^3+0x^2 的下方。

③ 把 x^3+0x^2 减去 x^3-x^2 所得到的差 x^2，写在它本来所在位置下一行的位置上，并把 $0\times x$ 降下来。

④ 比较 x^2+0x 和 $x-1$, 在商的位置上写上 x。

⑤ 把 $x-1$ 和 x 的乘积 x^2-x 写在 x^2+0x 的下面。

⑥ 把 x^2+0x 减去 x^2-x 所得到的差 x 写在下一行的位置上，并把 -1 降下来。

⑦ 比较 $x-1$ 和 $x-1$, 在商的位置上写上 1。

⑧ 把 $x-1$ 和 1 的乘积 $x-1$ 写在 $x-1$ 的下面。

⑨ 把 $x-1$ 减去 $x-1$ 的差 0 写在下一行的位置上。

另外，也可以根据公式

$(x-a)(x^2+ax+a^2)=x^3+ax^2+a^2x-ax^2-a^2x-a^3=x^3-a^3$ 来对算式进行因数分解。由此可得 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$，对算式 (x^2+x+1) 应用解的计算公式可得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}。$$

因此，答案就是 $x=1$，$\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，共 3 个解。

如果利用欧拉公式求解，那么分析过程则是

$$x^3=1=1+\mathrm{i}\times0=\cos2n\pi+\mathrm{i}\sin2n\pi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\pi}。$$

式中，n 为任意整数。

所以，等式两边同时求 3 次方根（两边同时乘以 $\frac{1}{3}$ 次方）可得

$$(x^3)^{\frac{1}{3}}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}n\pi}$$

（1）当 $n=0$ 时，

$$x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}0\pi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=\cos0+\mathrm{i}\sin0=1$$

（2）当 $n=1$ 时，

$$x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}=\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

（3）当 $n=2$ 时，

$$x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\times2\pi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{3}\pi}=\cos\frac{4}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

（4）当 $n=3$ 时，

$$x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\times3\pi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=\cos2\pi+\mathrm{i}\sin2\pi=1$$

（5）当 n=4 时，

$$\begin{aligned} x &= e^{i\frac{2}{3}\times 4\pi} \\ &= e^{i\frac{8}{3}\pi} \\ &= e^{i\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)} \\ &= e^{i2\pi}e^{i\frac{2}{3}\pi} \\ &= (\cos 2\pi + i\sin 2\pi)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin 2\pi\right) \\ &= (1+i\times 0)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

接下来的结果也会如上所述情况一样反复不断。所以，答案是 x=1，$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$，共 3 个解。

综上所述，如果应用复数（欧拉公式）求解，那么$x^3=1$的解是 $x^3=e^{i\frac{2}{3}n\pi}$。其中，n 是任意整数。

另外，接下来我们把

$$e^{i\frac{2}{3}\pi}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

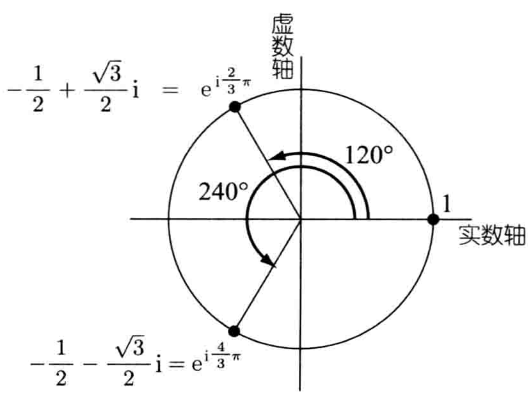
和

$$\begin{aligned} \left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^2 &= e^{i\frac{4}{3}\pi}=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi \\ &= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

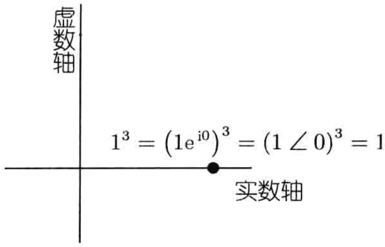
两者相乘后，看看结果如何。

$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{2}{3}\pi}\,e^{i\frac{4}{3}\pi} &= e^{i\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)} \\
&= e^{i\frac{6}{3}\pi} \\
&= e^{i2\pi} \\
&= \cos 2\pi + i\sin 2\pi \\
&= 1 + i\times 0 \\
&= 1 \\
e^{i\frac{2}{3}\pi}\,e^{i\frac{4}{3}\pi} &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \\
&= \frac{1+\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3i^3}{4} \\
&= \frac{1-(-1)\times 3}{4} = \frac{1+3}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

因此可知，无论在极坐标中还是在直角坐标中，两者都是一致的。而且，应用欧拉公式进行乘法计算要比其他方法更加简单快捷。最后，我们用复数平面来表示这 3 个解，则如下图所示。

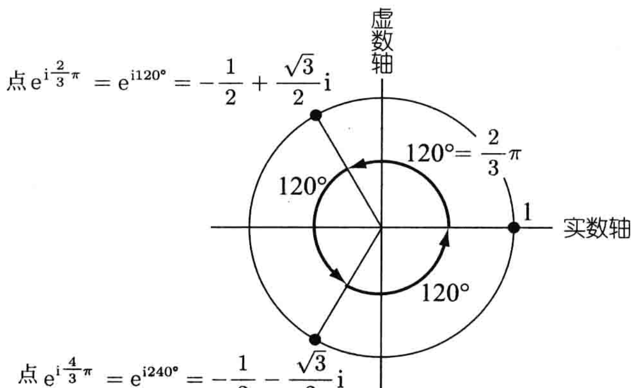


（1）当 x=1 时，x^3 则如下图所示。

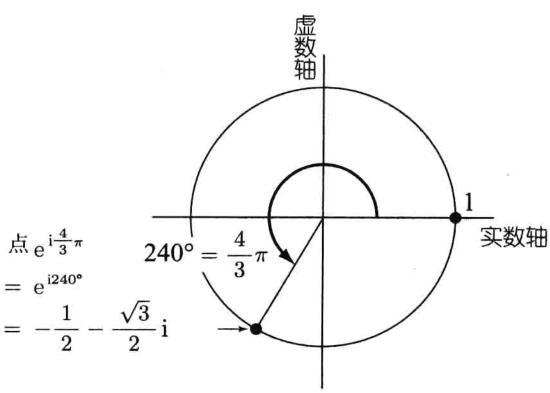


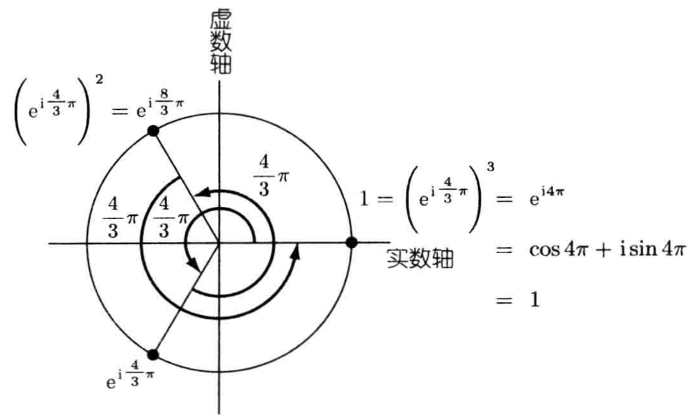
（2）当$x = e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$时，$x^3$ 则是

$$\left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^3$$
$$= e^{i2\pi}$$
$$= e^{i360°}$$
$$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$
$$= 1 + i \times 0$$
$$= 1$$

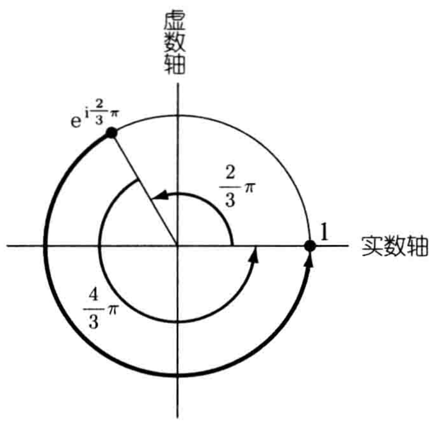


（3）当$x = e^{i\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$时，那么





（4）把$e^{i\frac{2}{3}\pi} \times e^{i\frac{4}{3}\pi}$在复数平面上进行计算则如下图所示。



因为乘以$e^{i\frac{4}{3}\pi}$意味着旋转$\frac{4}{3}\pi$〔rad〕，所以表示$e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$的点就变成了1。

CHAPTER 06

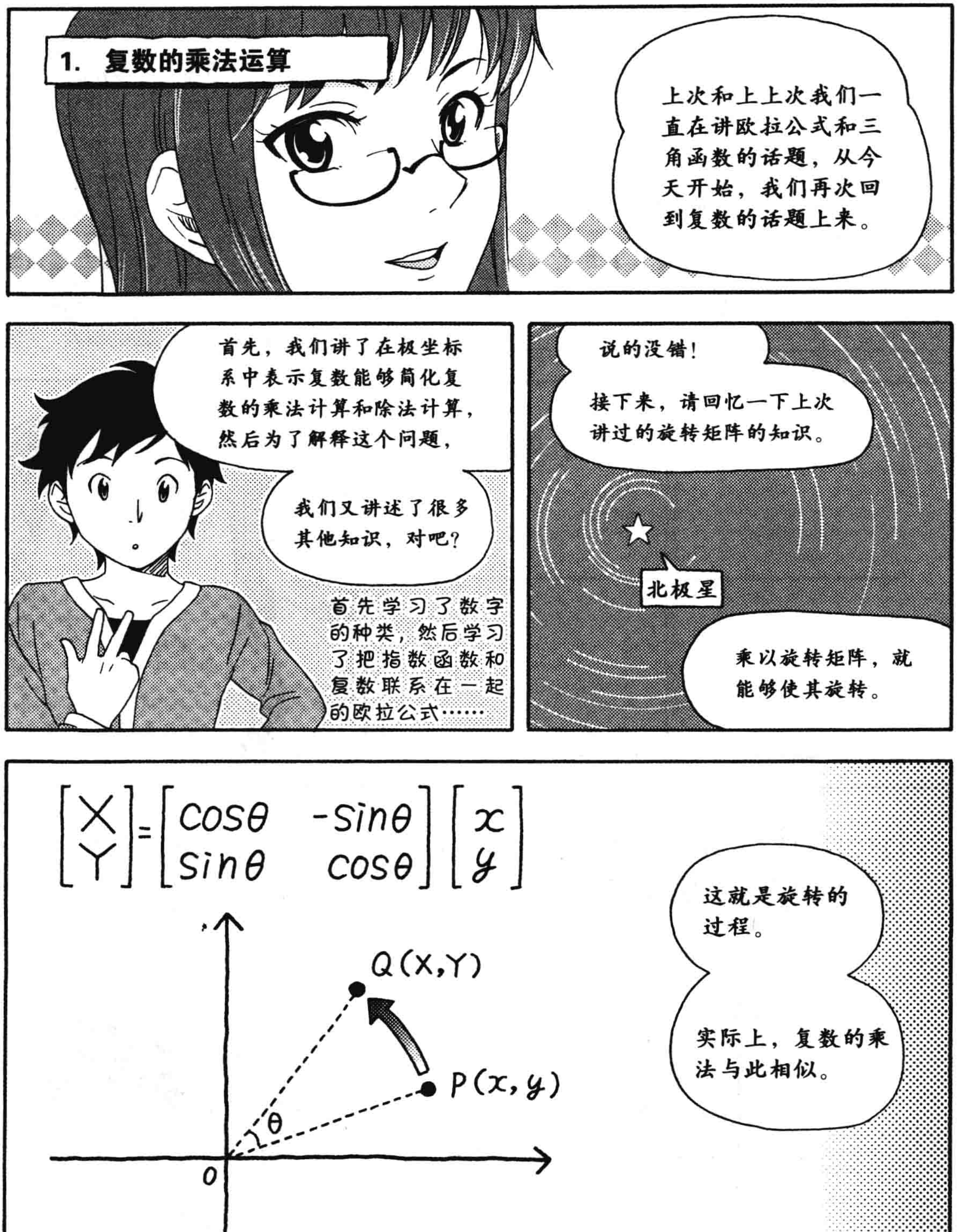
第6章

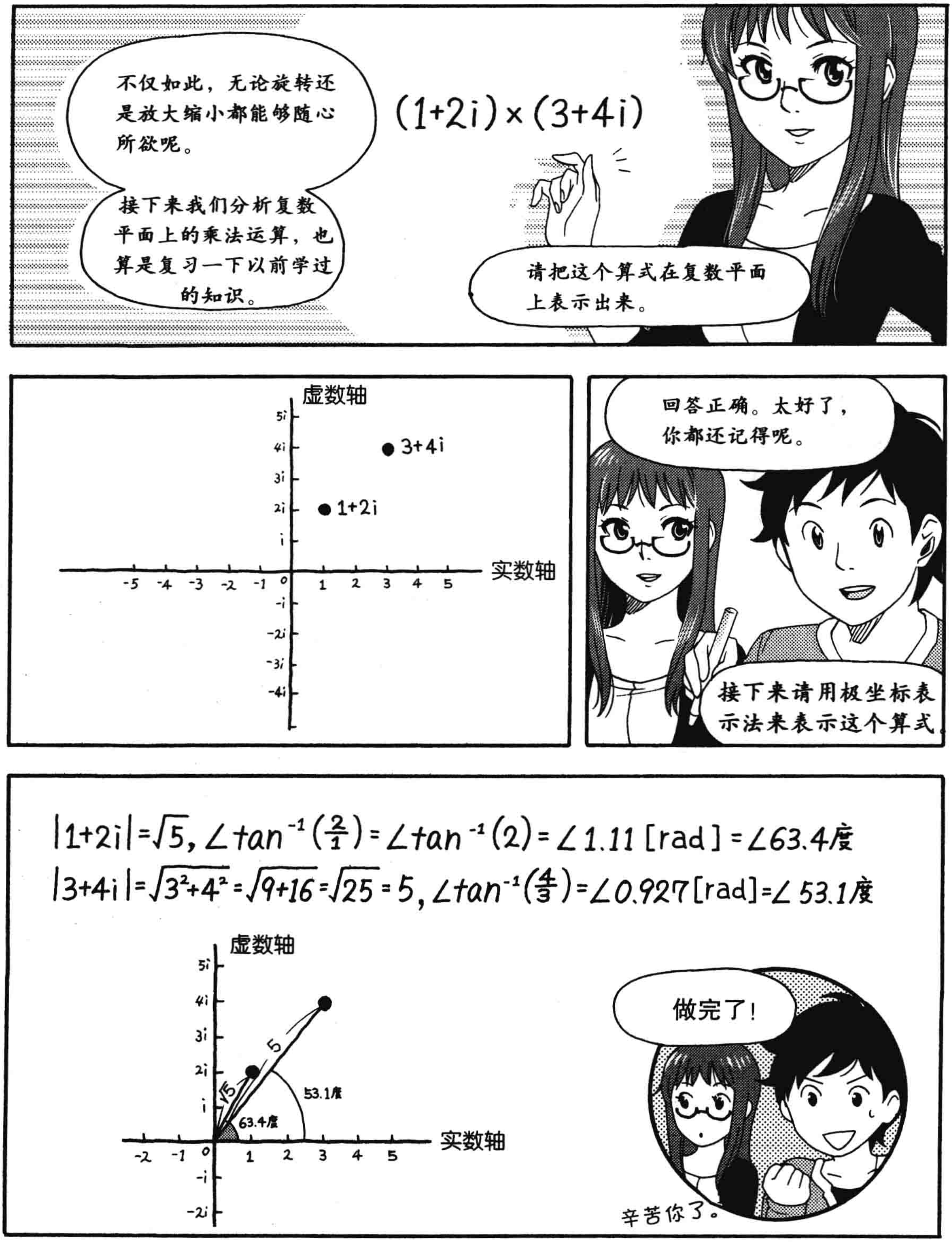
复数的性质、乘法和除法运算和极坐标表示方法

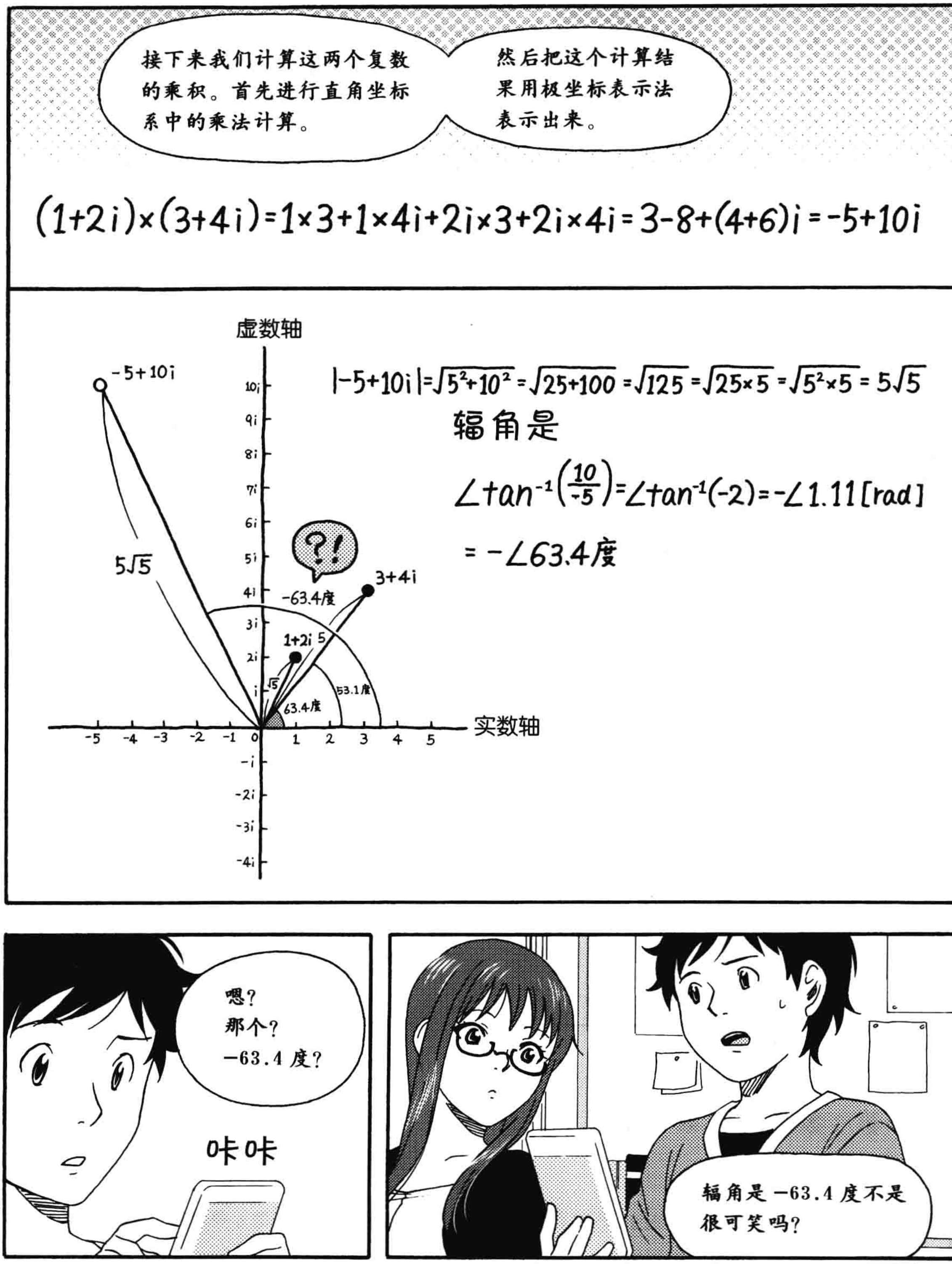

冰室小姐……
之前你问过我有没有喜欢的人，是吧？
冰室研究室
嗯……我喜欢的人就是
冰室小姐啊！
说了，说了，终于说出口了!!
是吗，谢了！
咯吱
咯吱
咯吱
咯吱
如果你讨厌我的话，是不可能每天都来我这里的吧。
嘭
这事儿我还是知道的啦！
什么？
我说的不是这层意思的喜欢啊……


要吗？这可是最新的草莓口味哟。
连连摆手
写完报告后喝上一杯，简直就是享受啊！
呼……
现在的气氛好像很不适合表白呢……
轻声嘟囔
还是算了吧，现在这种感觉我也很喜欢。
这次你又喜欢什么了？
啊，不是，没什么……
嗯
冰室小姐，你是怎么喜欢上数学的？
……
？
因为只要有数学在，我的人生就是光明的，就充满了阳光……
是这个缘故吧。

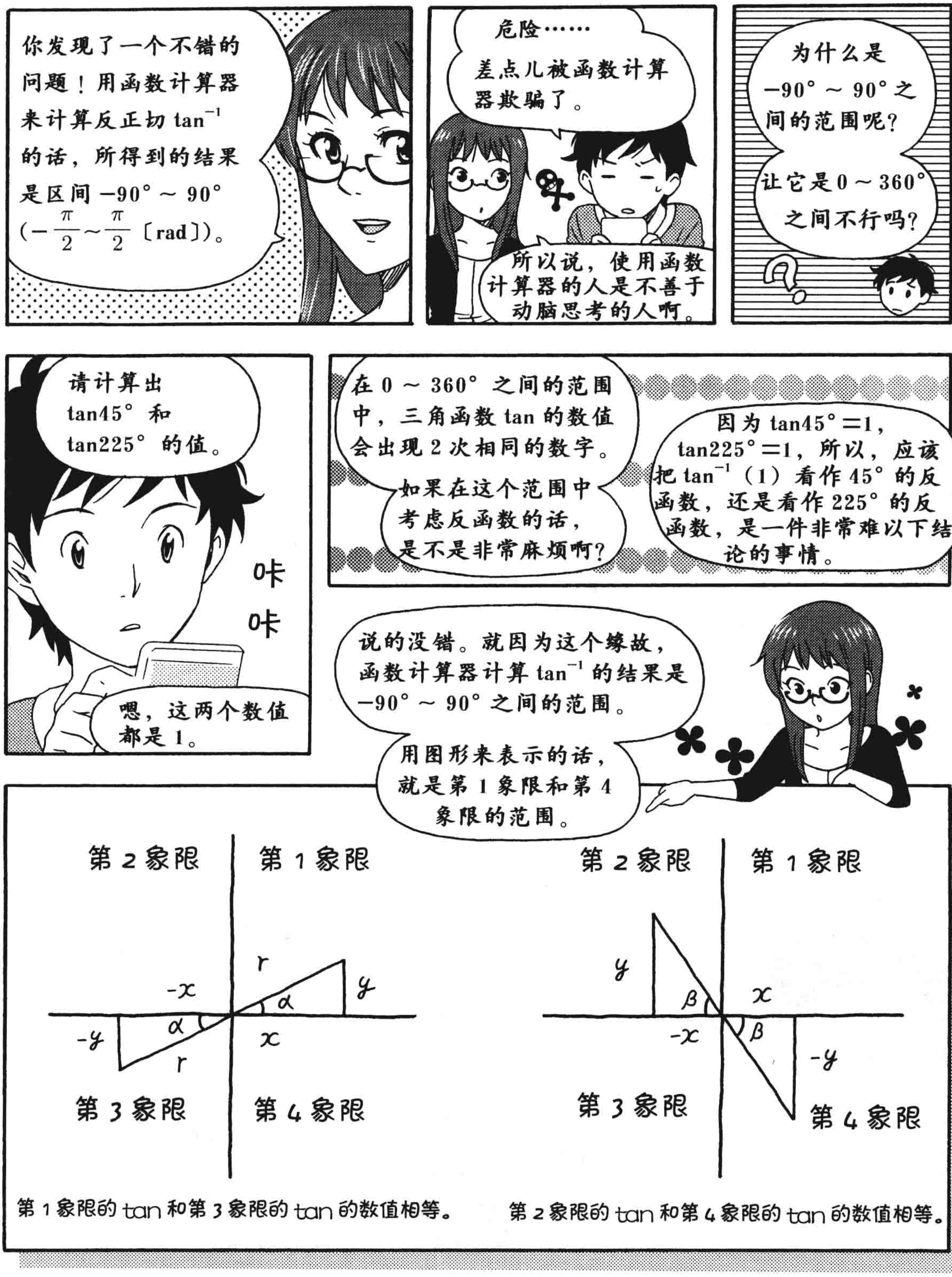

我家里的情况有点复杂，有很多问题我都不知道该怎么办才好，根本找不到答案。
但在数学领域，答案都非常清晰明确，所以我就被数学深深地吸引了。
是这样子的啊……
你没必要摆出一副这样的表情吧。
这只不过是我自己的事情罢了。
可是……
只要有数学在我就满足了。
揪……
还能拿到奖学金……
不仅如此！
还能给优太讲课呢！
！
……是！那么，今天也请您多多关照！

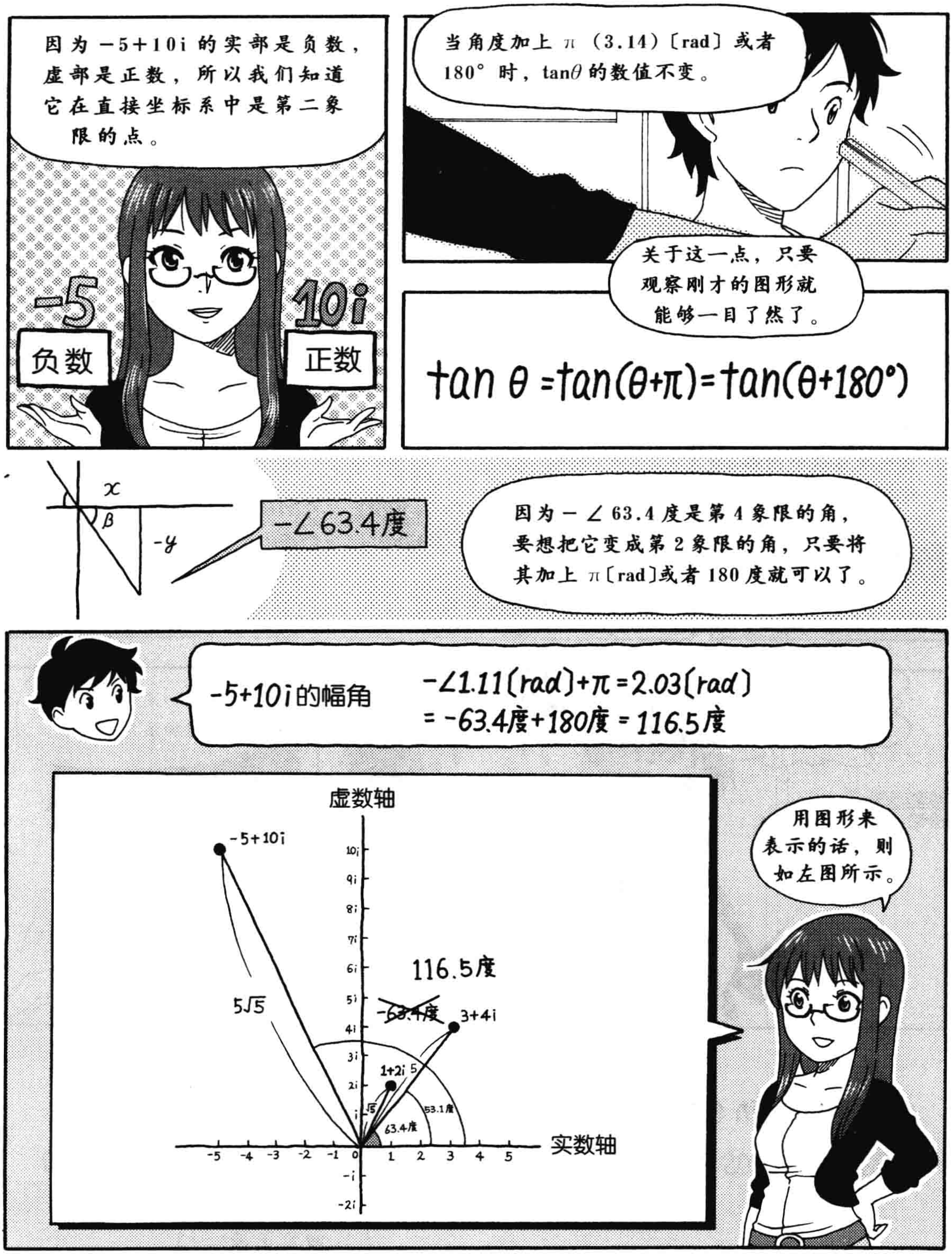

1. 复数的乘法运算
上次和上上次我们一直在讲欧拉公式和三角函数的话题，从今天开始，我们再次回到复数的话题上来。
首先，我们讲了在极坐标系中表示复数能够简化复数的乘法计算和除法计算，然后为了解释这个问题，
我们又讲述了很多其他知识，对吧？
首先学习了数字的种类，然后学习了把指数函数和复数联系在一起的欧拉公式……
说的没错！
接下来，请回忆一下上次讲过的旋转矩阵的知识。
北极星
乘以旋转矩阵，就能够使其旋转。
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
Q(X, Y)
P(x, y)
θ
O
这就是旋转的过程。
实际上，复数的乘法与此相似。

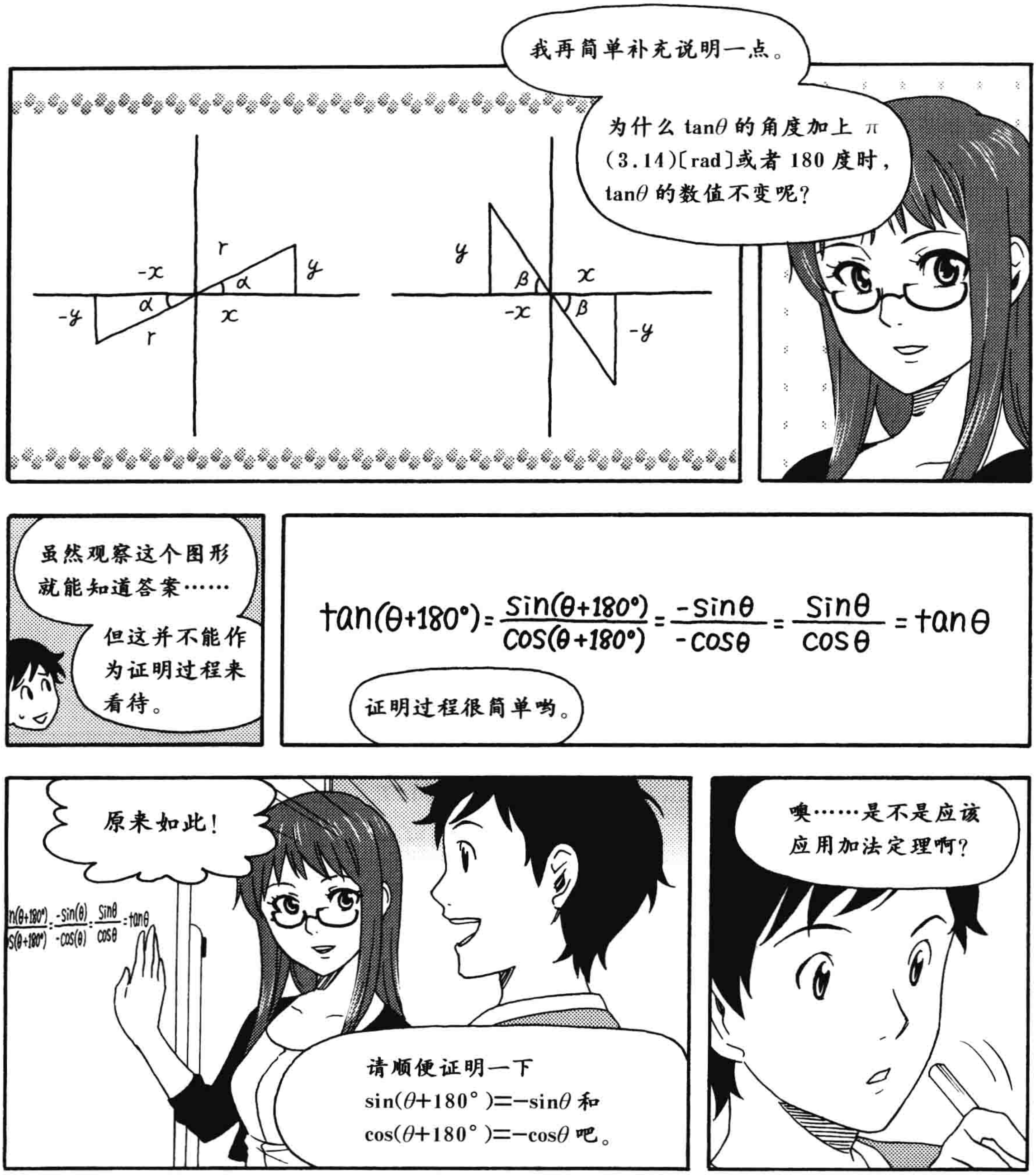

不仅如此，无论旋转还是放大缩小都能够随心所欲呢。
接下来我们分析复数平面上的乘法运算，也算是复习一下以前学过的知识。
(1+2i)×(3+4i)
请把这个算式在复数平面上表示出来。
虚数轴
5i
4i
3i
2i
i
-i
-2i
-3i
-4i
3+4i
1+2i
实数轴
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
回答正确。太好了，你都还记得呢。
接下来请用极坐标表示法来表示这个算式。
$|1+2i| = \sqrt{5}, \angle \tan^{-1}(\frac{2}{1}) = \angle \tan^{-1}(2) = \angle 1.11$ [rad] $= \angle 63.4$度
$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5, \angle \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = \angle 0.927$ [rad] $= \angle 53.1$度
虚数轴
5i
4i
3i
2i
i
-i
-2i
5
√5
53.1度
63.4度
实数轴
-2 -1 0 1 2 3 4 5
做完了！
辛苦你了。



接下来我们计算这两个复数的乘积。首先进行直角坐标系中的乘法计算。
然后把这个计算结果用极坐标表示法表示出来。
$(1+2i)\times(3+4i)=1\times3+1\times4i+2i\times3+2i\times4i=3-8+(4+6)i=-5+10i$
虚数轴
实数轴
$-5+10i$
$3+4i$
$1+2i$
$5\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$
5
-63.4度
63.4度
53.1度
?!
$|-5+10i|=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{25+100}=\sqrt{125}=\sqrt{25\times5}=\sqrt{5^2\times5}=5\sqrt{5}$
辐角是
$\angle\tan^{-1}\left(\frac{10}{-5}\right)=\angle\tan^{-1}(-2)=-\angle1.11\,[\mathrm{rad}]$
$=-\angle63.4$度
嗯？
那个？
－63.4 度？
咔咔
辐角是－63.4 度不是很可笑吗？


你发现了一个不错的问题！用函数计算器来计算反正切 $\tan^{-1}$ 的话，所得到的结果是区间 −90°～90°（$-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}$〔rad〕）。
危险……
差点儿被函数计算器欺骗了。
所以说，使用函数计算器的人是不善于动脑思考的人啊。
为什么是 −90°～90° 之间的范围呢？
让它是 0～360° 之间不行吗？
请计算出 tan45° 和 tan225° 的值。
咔
咔
嗯，这两个数值都是 1。
在 0～360° 之间的范围中，三角函数 tan 的数值会出现 2 次相同的数字。
如果在这个范围中考虑反函数的话，是不是非常麻烦啊？
因为 tan45°＝1，tan225°＝1，所以，应该把 $\tan^{-1}$（1）看作 45° 的反函数，还是看作 225° 的反函数，是一件非常难以下结论的事情。
说的没错。就因为这个缘故，函数计算器计算 $\tan^{-1}$ 的结果是 −90°～90° 之间的范围。
用图形来表示的话，就是第 1 象限和第 4 象限的范围。
第 2 象限
第 1 象限
r
y
-x
α
α
-y
x
r
第 3 象限
第 4 象限
第 1 象限的 tan 和第 3 象限的 tan 的数值相等。
第 2 象限
第 1 象限
y
β
x
-x
β
-y
第 3 象限
第 4 象限
第 2 象限的 tan 和第 4 象限的 tan 的数值相等。

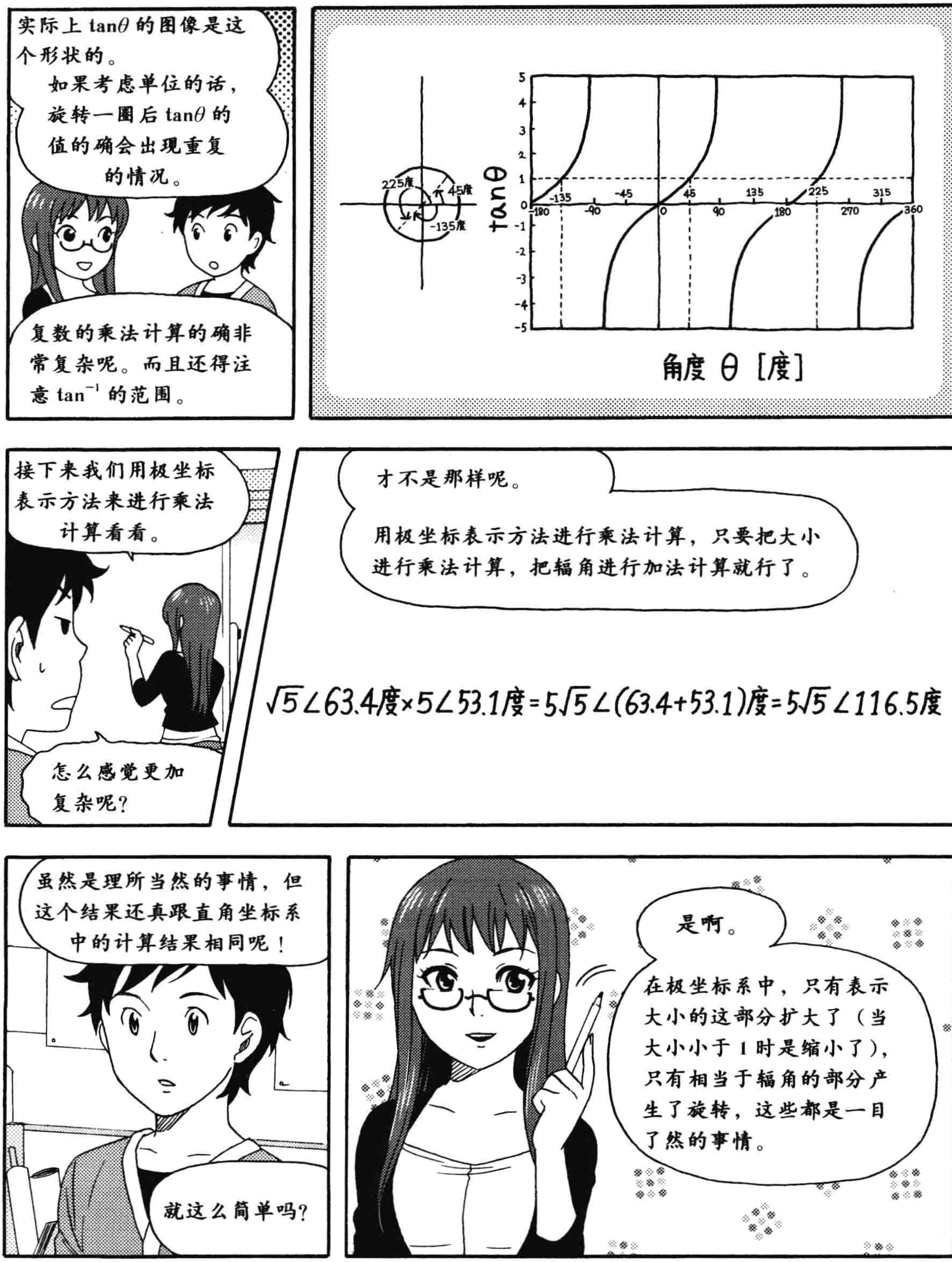

因为 −5+10i 的实部是负数，虚部是正数，所以我们知道它在直接坐标系中是第二象限的点。
-5
负数
10i
正数
当角度加上 π（3.14）〔rad〕或者 180° 时，tanθ 的数值不变。
关于这一点，只要观察刚才的图形就能够一目了然了。
tan θ =tan(θ+π)=tan(θ+180°)
x
β
-y
-∠63.4度
因为 −∠63.4 度是第 4 象限的角，要想把它变成第 2 象限的角，只要将其加上 π〔rad〕或者 180 度就可以了。
-5+10i的幅角
-∠1.11〔rad〕+π=2.03〔rad〕
=-63.4度+180度=116.5度
虚数轴
-5+10i
116.5度
5√5
~~-63.4度~~
3+4i
1+2i
5
√5
53.1度
63.4度
实数轴
用图形来表示的话，则如左图所示。



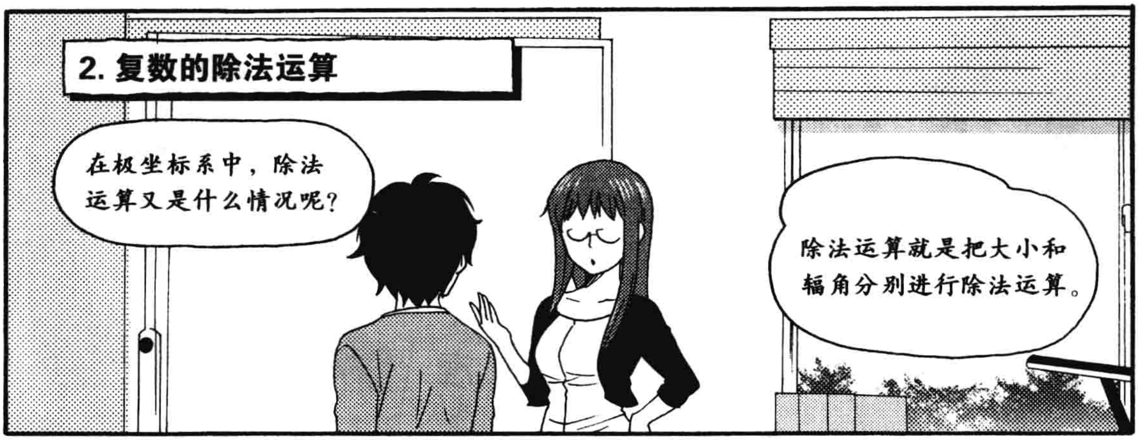
$$\sin(\theta+180^\circ)=\sin\theta\cos 180^\circ+\cos\theta\sin 180^\circ=\sin\theta\times(-1)+\cos\theta\times 0=-\sin\theta$$

$$\cos(\theta+180^\circ)=\cos\theta\cos 180^\circ-\sin\theta\sin 180^\circ=\cos\theta\times(-1)-\sin\theta\times 0=-\cos\theta$$

回答正确！

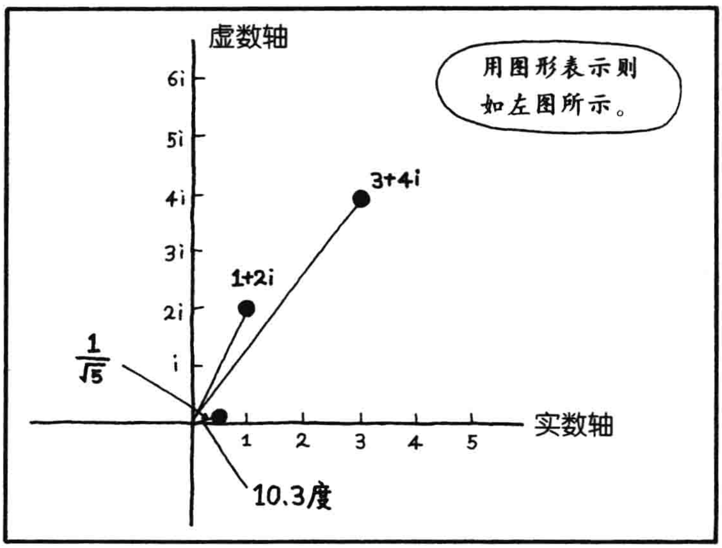

实际上 tanθ 的图像是这个形状的。
如果考虑单位的话，旋转一圈后 tanθ 的值的确会出现重复的情况。
复数的乘法计算的确非常复杂呢。而且还得注意 tan⁻¹ 的范围。
225度
45度
-135度
tanθ
角度 θ [度]
接下来我们用极坐标表示方法来进行乘法计算看看。
才不是那样呢。
用极坐标表示方法进行乘法计算，只要把大小进行乘法计算，把辐角进行加法计算就行了。
$\sqrt{5}\angle 63.4度 \times 5\angle 53.1度 = 5\sqrt{5}\angle(63.4+53.1)度 = 5\sqrt{5}\angle 116.5度$
怎么感觉更加复杂呢？
虽然是理所当然的事情，但这个结果还真跟直角坐标系中的计算结果相同呢！
就这么简单吗？
是啊。
在极坐标系中，只有表示大小的这部分扩大了（当大小小于1时是缩小了），只有相当于辐角的部分产生了旋转，这些都是一目了然的事情。

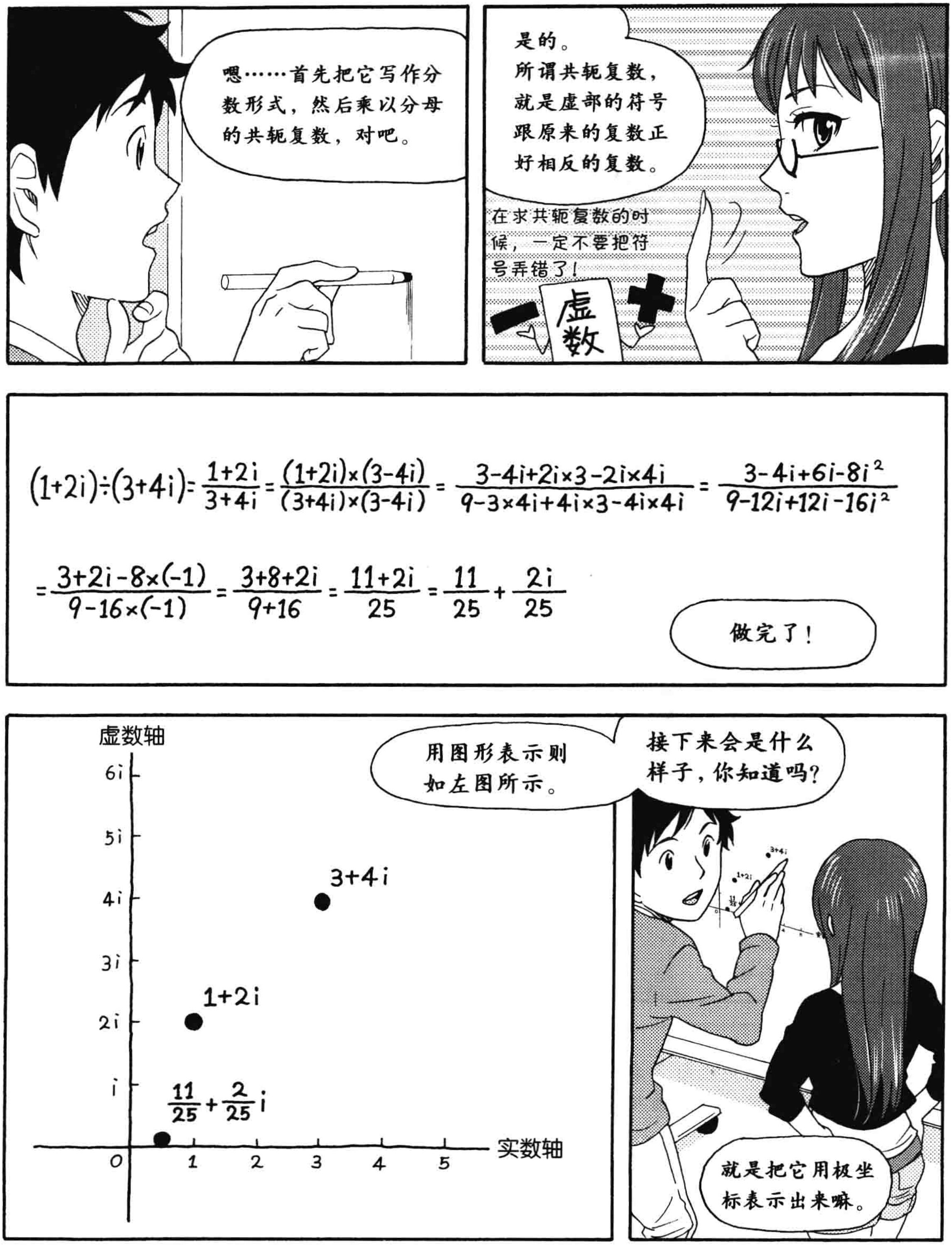

接下来我们解释说明这其中的原因。
首先，我们来分析用极坐标表示方法表示的两个复数 $\dot{Z}_1$ 和 $\dot{Z}_2$。
你还记得应用欧拉公式后，用指数表示的极坐标表示方法吗？
唉……
复习笔记
啪啦
※ 请参考第 4 章第 110 页。
$\dot{Z}_1 = r_1 e^{i\alpha}$
$\dot{Z}_2 = r_2 e^{i\beta}$
回答正确。
这个形式也经常被用到，所以请一定要记住哟。
这两个复数进行乘法运算的过程是这样的。
吱
$\dot{Z}_1 \times \dot{Z}_2 = r_1 e^{i\alpha} \times r_2 e^{i\beta} = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$
请认真观察这个算式的最右边。
确实如上所述，大小变成了（1 的大小 ×2 的大小），辐角变成了（Z_1 的辐角 $+Z_2$ 的辐角）呢！
复数的乘法运算表示旋转，这个知识点非常重要。
一定要好好记住哦！
明白了！
嗤嗤
嗤嗤



$$(1+2i)\div(3+4i)=\sqrt{5}\angle 63.4\text{度}\div 5\angle 53.1\text{度}=\frac{\sqrt{5}}{5}\angle(63.4-53.1)\text{度}=\frac{1}{\sqrt{5}}\angle(10.3\text{度})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\angle(0.18)\text{弧度(rad)}$$

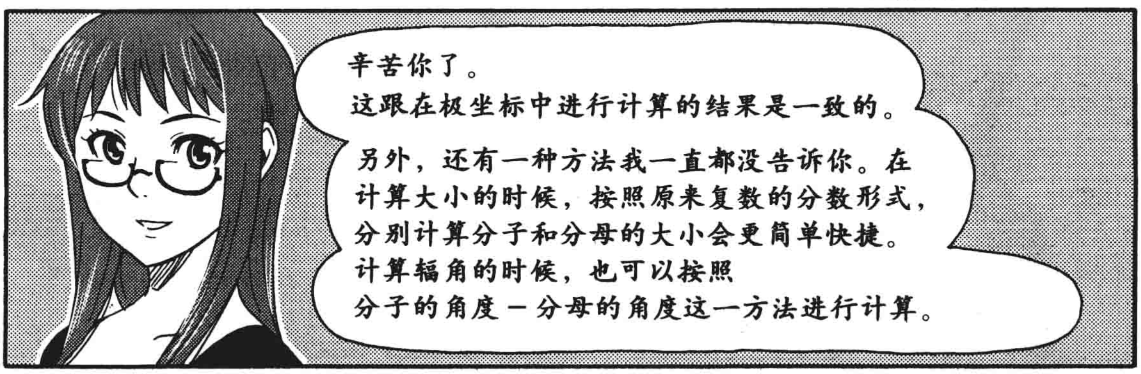



嗯……首先把它写作分数形式，然后乘以分母的共轭复数，对吧。
是的。所谓共轭复数，就是虚部的符号跟原来的复数正好相反的复数。
在求共轭复数的时候，一定不要把符号弄错了！
虚数
$(1+2i)\div(3+4i)=\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{(1+2i)\times(3-4i)}{(3+4i)\times(3-4i)}=\frac{3-4i+2i\times3-2i\times4i}{9-3\times4i+4i\times3-4i\times4i}=\frac{3-4i+6i-8i^2}{9-12i+12i-16i^2}$
$=\frac{3+2i-8\times(-1)}{9-16\times(-1)}=\frac{3+8+2i}{9+16}=\frac{11+2i}{25}=\frac{11}{25}+\frac{2i}{25}$
做完了！
虚数轴
6i
5i
4i
3i
2i
i
0
1
2
3
4
5
实数轴
3+4i
1+2i
$\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$
用图形表示则如左图所示。
接下来会是什么样子，你知道吗？
就是把它用极坐标表示出来嘛。

$$\sqrt{\left(\frac{11}{25}\right)^2+\left(\frac{2}{25}\right)^2}=\sqrt{\frac{121+4}{25^2}}=\frac{\sqrt{125}}{25}=\frac{\sqrt{25\times5}}{25}=\frac{\sqrt{5^2\times5}}{25}=\frac{5\sqrt{5}}{25}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{辐角}：\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)=10.3\text{度}=0.18\ (\text{rad})$$

是这样哈。



$$\left|(1+2i)\div(3+4i)\right|=\left|\frac{1+2i}{3+4i}\right|=\left|\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9+16}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{辐角}：\angle\left(\frac{1+2i}{3+4i}\right)=\angle(1+2i)-\angle(3-4i)=\tan^{-1}(2)-\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$=63.4\text{度}-53.1\text{度}=10.3\text{度}$$

至于为什么能够这样进行计算，接下来我将进行说明。

$\dot{Z}_1 = r_1 e^{i\alpha}$
$\dot{Z}_2 = r_2 e^{i\beta}$
这两个复数的除法计算如下所示。
$\dot{Z}_1 \div \dot{Z}_2 = r_1 e^{i\alpha} \div r_2 e^{i\beta} = \frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{i\beta}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)}$
$|\dot{Z}_1 \div \dot{Z}_2| = \frac{r_1}{r_2}, \angle(\dot{Z}_1 \div \dot{Z}_2) = \alpha - \beta$
指数的除法运算变成了减法运算呢。
大小变成了（$\dot{Z}_1$的大小 ÷$\dot{Z}_2$的大小），辐角变成了（$\dot{Z}_1$的辐角 −$\dot{Z}_2$的辐角）呢！
从直角坐标系到极坐标系……
仅仅改变了思考方法，计算过程就变得简单快捷了呢！
好了，今天就讲到这里吧，接下来我们开始做练习题。
说实话，真没想到优太能够坚持到现在呢。
真该对你刮目相看了。
这都多亏了冰室小姐啊！


!
微笑
看来真该改改想法了呢……
扑通
我……
原来我这张脸也会笑啊。
不知道在优太眼里，我是怎样的一个人啊？
可溶
奶油
大麦茶
超级草莓味
我……


我喜欢的人
就是冰室小姐！
哐当
骨碌骨碌骨碌骨碌
那个？……
那个难道是
那个意思！？
……
我到现在才意识
到，这可怎么办
啊……

3. 与度数法和弧度法相对应的三角函数表

下表是与度数法和弧度法相对应的三角函数表。表格中出现的数值都能够直接用来进行计算。

角度θ（度数法，degree）向左旋转（逆时针方向）	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
角度θ（度数法，degree）向右旋转（顺时针方向）	-360	-330	-315	-300	-270	-240	-225	-210	-180	-150	-135	-120	-90	-60	-45	-30	0
角度θ（弧度法，radian）向左旋转（逆时针方向）	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
角度θ（弧度法，radian）向右旋转（顺时针方向）	-2π	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

度数法（单位是度，也就是degree）的直角是90度，直线是180度，1周是360度。

弧度法（单位是rad，也就是radian）的直角是$\frac{\pi}{2}$〔rad〕，直线是π〔rad〕，1周是2π〔rad〕。

4. 指数相关公式

下面是关于指数的一般公式。

$$n \times n = n^2 \qquad n \times n \times n = n^3$$

$$\begin{aligned}(n \times n) \times (n \times n \times n) &= n^2 \times n^3 \\ &= n^{2+3} \\ &= n^5\end{aligned}$$

$$n^a \times n^b = n^{a+b}$$

$$n^{-a} = \frac{1}{n^a}$$

$$\begin{aligned}n^5 \div n^3 &= \frac{n^5}{n^3} \\ &= n^{5-3} \\ &= n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^2 \div n^5 &= \frac{n^2}{n^5} \\ &= n^{2-5} \\ &= n^{-3} \\ &= \frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^a \div n^b &= \frac{n^a}{n^b} \\ &= n^{a-b} \\ &= \frac{1}{n^{-(a-b)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^{\frac{b}{a}} &= \sqrt[a]{n^b} \\ &= \left(n^{\frac{1}{a}}\right)^b \\ &= \left(n^b\right)^{\frac{1}{a}}\end{aligned}$$

$$(n^a)^b = n^{ab}$$

$$\begin{aligned}(mn)^a &= m^a n^a \\ &= n^a m^a\end{aligned}$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^a = \frac{m^a}{n^a}$$

5. 对数函数

对数的定义

接下来我们分析指数函数 $y = a^x$ 的反函数。所谓反函数，就是 x 和 y 的位置进行互换后的函数。因此，指数函数的反函数就是 $x = a^y$，因为我们看不习惯 $x=$ 这种书写形式，所以把它改写成 $y=$ 的形式，这就是对数函数。也就是说，指数函数和对数函数互为反函数。对数函数写作

$$y = \log_a x$$

的形式。其中，a 被称作"对数的底"或者"对数函数的底数"。只是，当 a 等于 0 或者 1 时，因为 $0^y = 0$，$1^y = 1$，所以无论 y 取什么数值，x 恒等于 0 或者 1。另外，当 a 为负数时，情况会很复杂。例如，假设 $a=-2$，那么

$$(-2)^1 = -2$$

$$(-2)^2 = 4$$

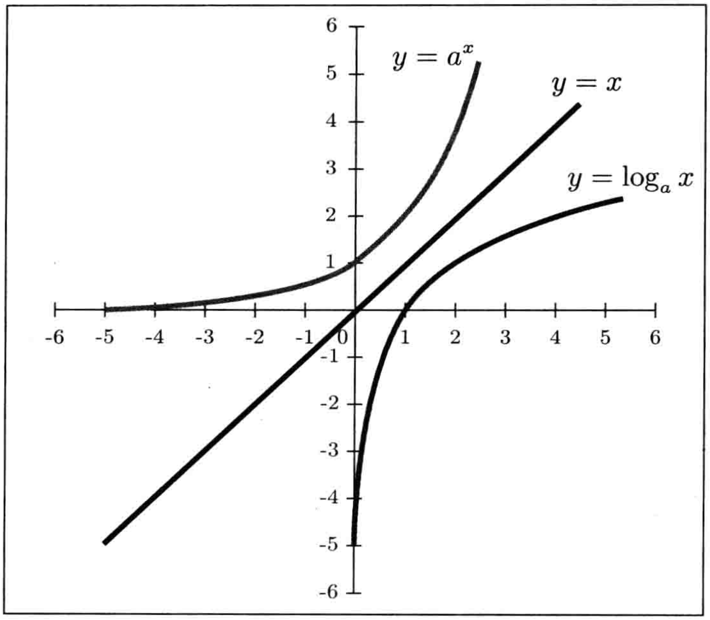
$$(-2)^3 = -8$$

如上所述，计算结果的符号会不断发生变化。最后，如果 y 是小数的话，那么在实数范围内则无法计算结果。假设 $y=1.5$，那么

$$\begin{aligned}
(-2)^{1.5} &= (-2)^{\frac{3}{2}} \\
&= [2 \times (-1)]^{\frac{3}{2}} \\
&= [2(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)]^{\frac{3}{2}} \\
&= [2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}]^{\frac{3}{2}} \\
&= 2^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} \\
&= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 \left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right] \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^3 (0 - \mathrm{i}) = -2\sqrt{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

因此，因为我们只分析实数范围内的对数函数，所以规定对数的底 a 的取值范围是 $a>0$ 且 $a \neq 1$。这样一来，因为 $x=a_y$，所以 x 的数值恒为正数。对数函数 $y=\log_a x$ 中的 x 被称作真数，而 $x>0$ 被称作对数函数的值域。特别是，当对数的底 a 等于 10 时，被称作常用对数，当对数的底 a 为纳皮尔常数时，则被称作自然对数。

根据反函数的性质可知，指数函数 $y = a^x$ 和它的反函数 $y = \log_a x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。当 $a=2$ 时，其图像如下图所示。



■图 6.1 指数函数和对数函数

对数函数的计算公式如下所示。

(1) $\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a a = 1$

(3) $\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B$

(4) $\log_a \left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$

(5) $\log_a A^B = B \log_a A$

(6) $\log_a A = \dfrac{\log_C A}{\log_C a}$ 底的变换公式

6. 既然 (–1) × (–1)=1, 那么借钱 × 借钱 = 存钱吧

在中学时代学习数学的时候，就已经出现了负数。在我的记忆当中，数学老师经常说“请记住（–1）×（–1）=1”。为什么 –1 这个负数乘以 –1 就变成了正数呢，关于这一点我一直觉得非常不可思议。就拿日常生活中借钱这件事儿来举例进行分析吧，我们可以把存钱看作正数，把借钱看作负数，那么借钱 × 借钱 = 存钱这个道理，无论怎么分析都是天方夜谭。然而，这个答案在大学数学中得到了证明。

请回忆一下欧拉公式。即

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

把 θ=180 度（π 弧度）代入欧拉公式可得

$$\begin{aligned} e^{i180^\circ} &= e^{i\pi} \\ &= \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ \\ &= \cos\pi + i\sin\pi \\ &= -1 + i(0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

接下来请回忆起复数的乘法运算。乘以 –1 的意义是，数字的大小变成原来大小的 –1 倍，也就是 1 倍，角度变成原来的角度加上 –1 的辐角，而 –1 的辐角本来就是 180 度（π 弧度）。

因此，用复数的乘法运算来分析（–1）×（–1）的话，则如下所示。

$$\begin{aligned} (-1)\times(-1) &= e^{i180^\circ} \times e^{i180^\circ} \\ &= e^{i\pi} \times e^{i\pi} \\ &= e^{i(180^\circ+180^\circ)} \\ &= e^{i(\pi+\pi)} \\ &= e^{i360^\circ} \\ &= e^{i2\pi} \\ &= \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ \\ &= \cos 2\pi + i\sin 2\pi \\ &= 1 + i\times(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

也就是说，在数学领域中，−1 并不等于借钱，而代表方向旋转 180 度（π 弧度）、大小为 1 的数字。乘以两个 −1，则表示大小为 1、方向旋转 360 度（2π 弧度）的数字。因为 360 度（2π 弧度）等于 0 度，所以结果变成了 1。

CHAPTER 07

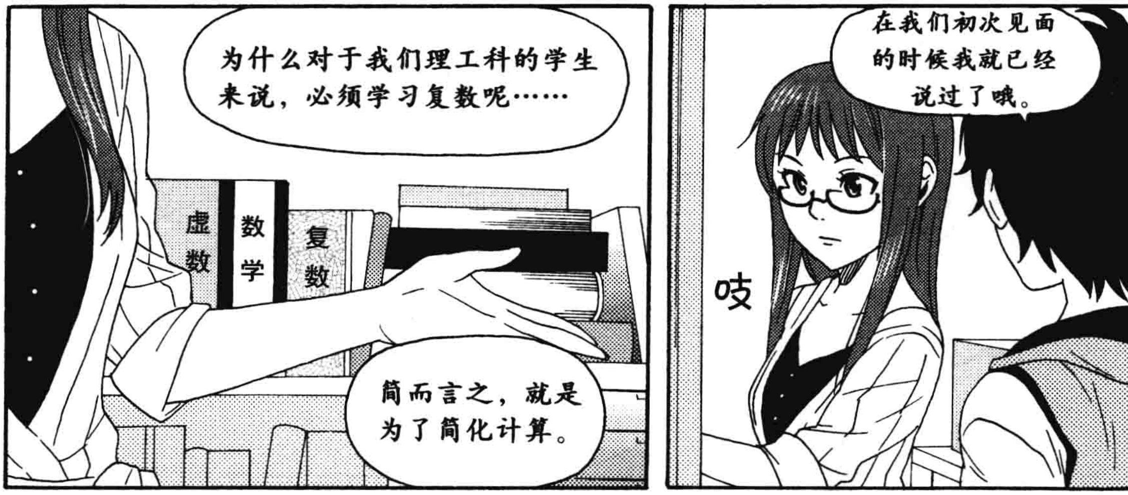
第7章

复数在工学领域中的应用


表白了吧，过关了吗？
恐怕高傲的
女王殿下对你
不屑一顾吧？
不是的。冰室小姐应该
是没意识到我所说的是
什么意思。
毕竟，如果弄得下面的
课程没法继续上的话，
可就不好了。
原来如此……
就算你有你的理由，但
根据我的经验，我还是
觉得你这事儿不靠谱。
嘭
就算如此，
当最后的课程结束
之后……
我还想再次向她
表白心意。
优太真是勇气可嘉啊！
恭喜！
太好了！我会提前给你
准备好失恋纪念会的！
数学课准备室
冰室研究室
咔嚓嚓

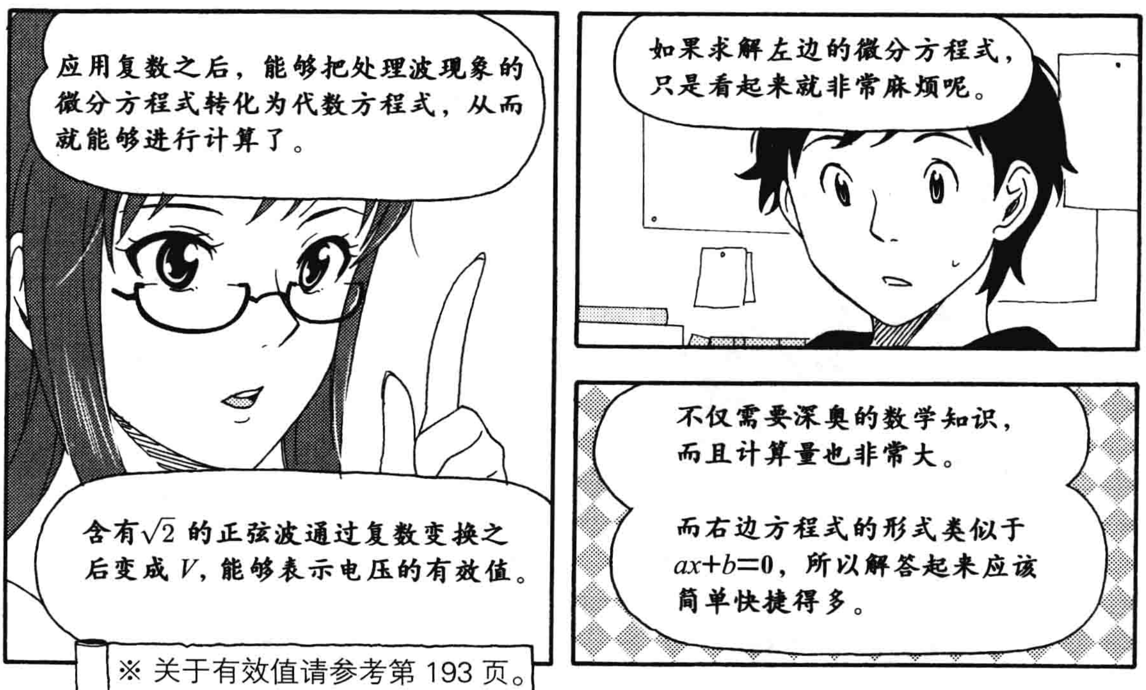

你好！
啊！
啊哈哈哈哈！
你怎么了啊？
没、没什么……
做好心理准备了……
对了……
是啊，今天会把关于虚数和复数的所有知识都讲完。
先请进。
嗯……
今天是最后一堂课了。
一定要认真听讲哟！
想到今天是最后一堂课，心里还真不舒服呢……
呼啦
嘎啦嘎啦
这就是今天的讲义。
哎呀


啪
冰室小姐，这很危险啊。
嘶
没事儿吧？
谢，谢谢！
那，那么，我们开始上最后一堂课吧!!
没关系，我跟平时没什么两样……一定没露馅儿。
怎么觉得今天的冰室小姐这么奇怪啊……
请一定坚持到最后的最后哦。
是！



$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)\rightarrow R\dot{I}+j\omega L\dot{I}=\dot{V}$$

计算电流数值的微分方程式→计算电流数值的应用了复数的代数方程式

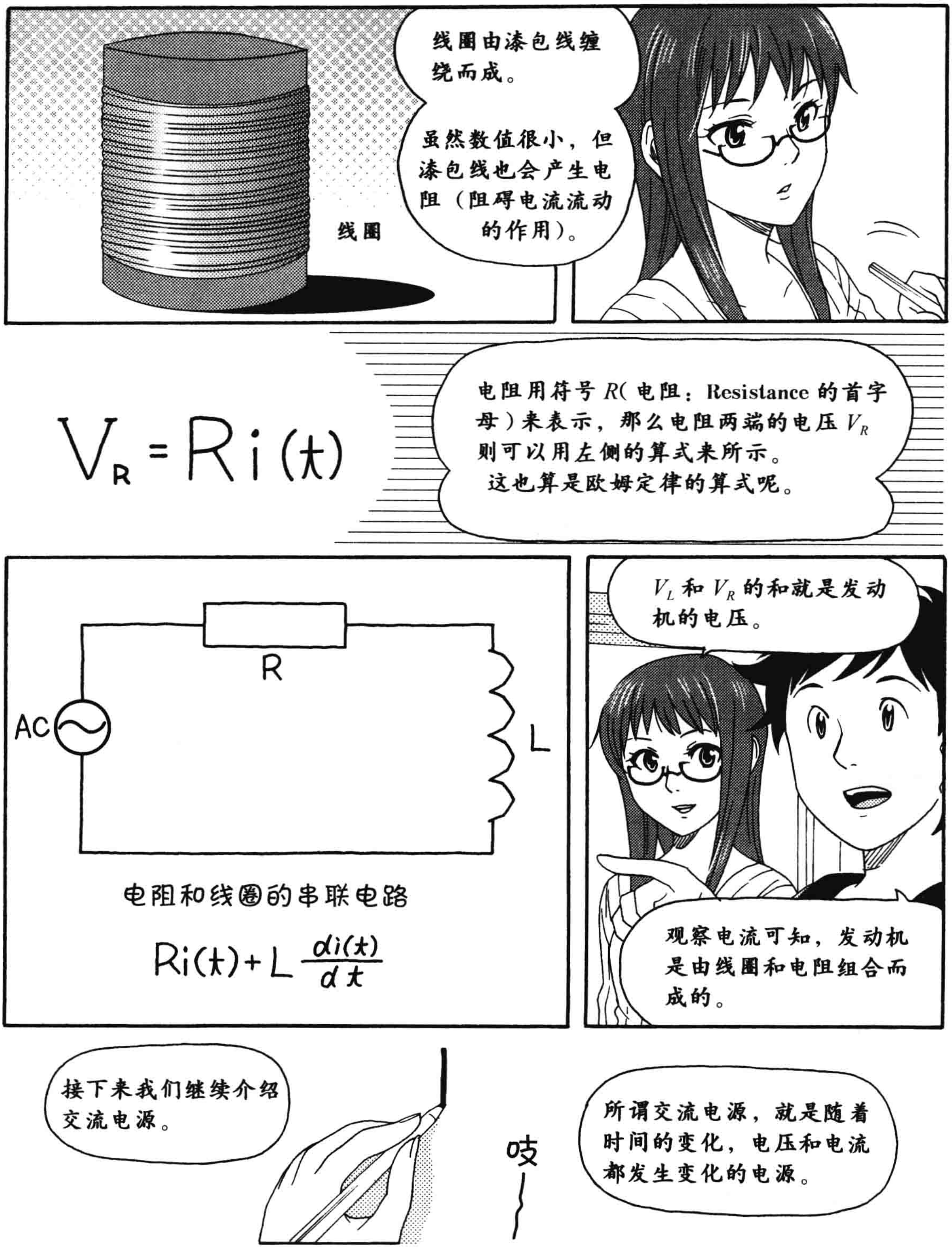


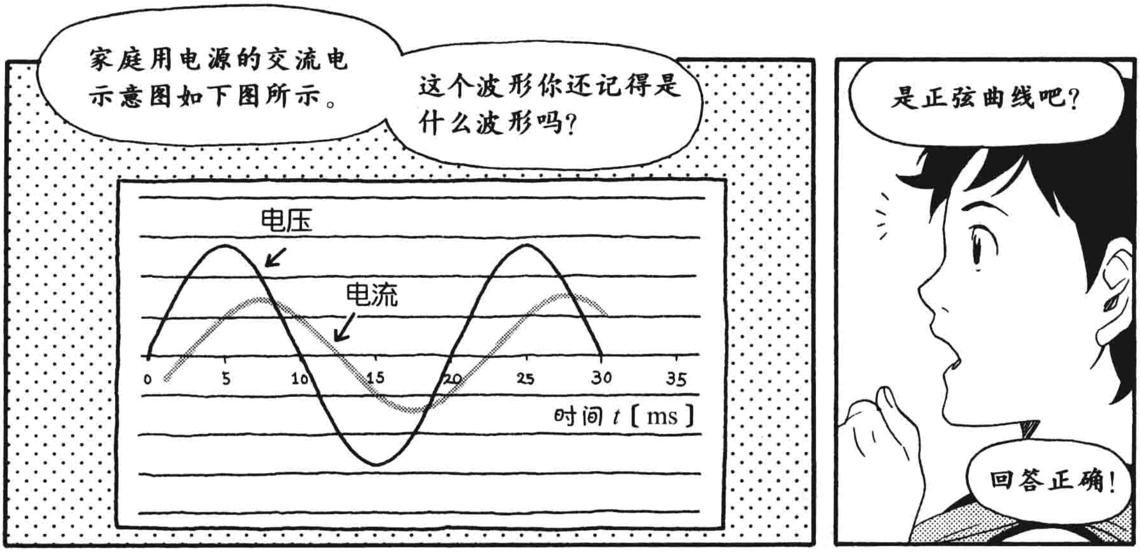
※ 关于有效值请参考第 193 页。

1. 交流电路

接下来我们来分析实际生活当中的交流电路。

发动机中有线圈，电流流经线圈两端时的电压 V_L 可以表示如下。
$V_L = L\frac{di(t)}{dt}$
这是刚才的微分方程式呢。
请注意，这里的 i 并不是虚数的意思，而是电流的意思哦。
i虚数
电流
因为这是从实验中得到的算式，所以只要记住就是这么回事儿就行了。
因为交流电流随着时间的变化而发生变化，所以电流 i 就关于时间 t 的函数。
$= L\frac{di(t)}{dt}$
这个算式乘以自感系数 L 所得到的结果就是电压 V_L。
自感系数是什么啊？
这个名称可真不好读啊！
所谓自感系数，简而言之，就是保持电流的流动一定的性质。
自感系数大，电流不容易发生变化
自感系数小，电流容易发生变化
请不要在意名称，只要记住它表示线圈的性质就行了。


线圈由漆包线缠绕而成。
虽然数值很小，但漆包线也会产生电阻（阻碍电流流动的作用）。
线圈
电阻用符号 R（电阻：Resistance 的首字母）来表示，那么电阻两端的电压 V_R 则可以用左侧的算式来所示。这也算是欧姆定律的算式呢。
$V_R = Ri(t)$
R
AC
L
电阻和线圈的串联电路
$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$
V_L 和 V_R 的和就是发动机的电压。
观察电流可知，发动机是由线圈和电阻组合而成的。
接下来我们继续介绍交流电源。
吱
所谓交流电源，就是随着时间的变化，电压和电流都发生变化的电源。



交流电压 $\sqrt{2}\, V_m \sin(\omega t)$

交流电流 $\sqrt{2}\, I_m \sin(\omega t+\varphi)$

因此，家庭用电源的电压和电流能够用 sin 函数来表示。

V_m 电压的有效值

（家庭用电源的最大值是 141.42V，有效值是 100V）

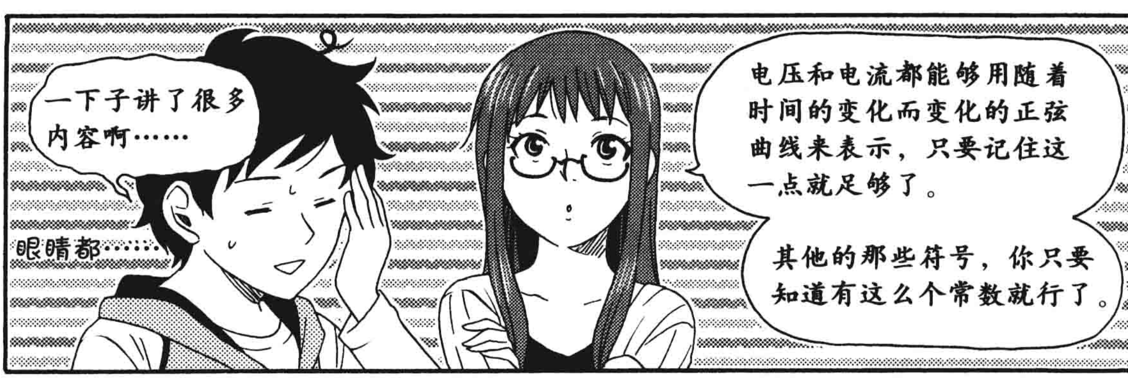
I_m 电流的有效值

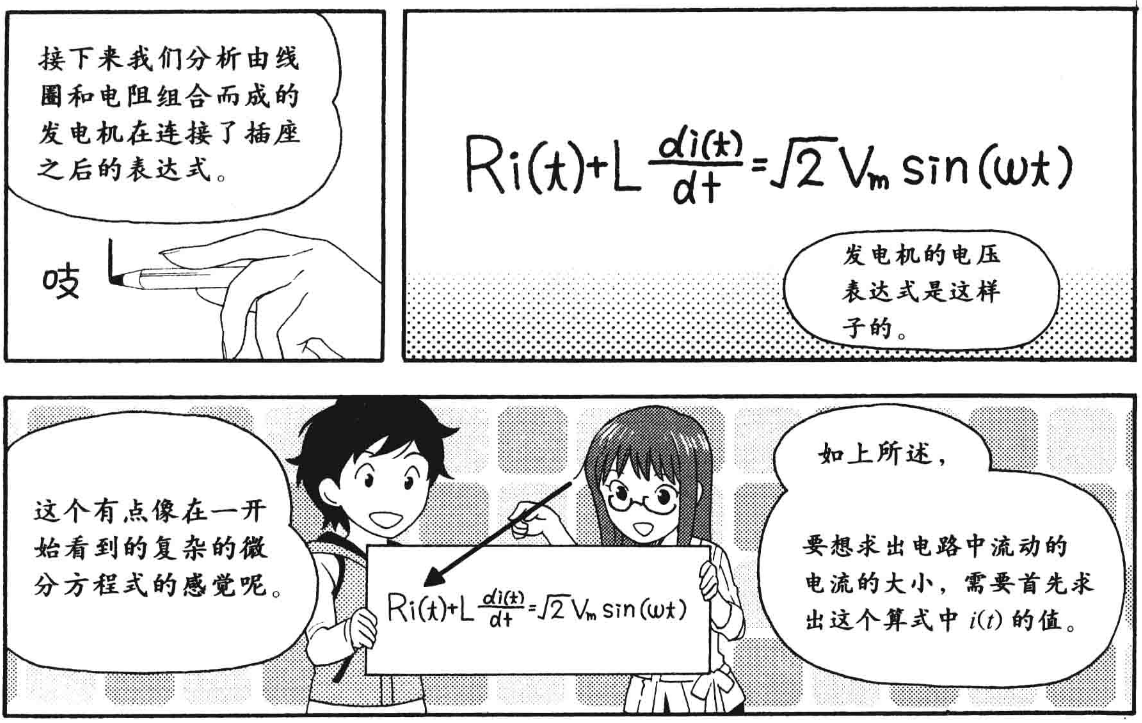
ω 角频率 角的旋转速度 用 $2\pi f$ 来表示

（因为东日本的家庭用电源频率 f 是 50Hz，所以 $\omega=2\pi f=2\pi\times 50=100\pi=314.159$〔rad/s〕）

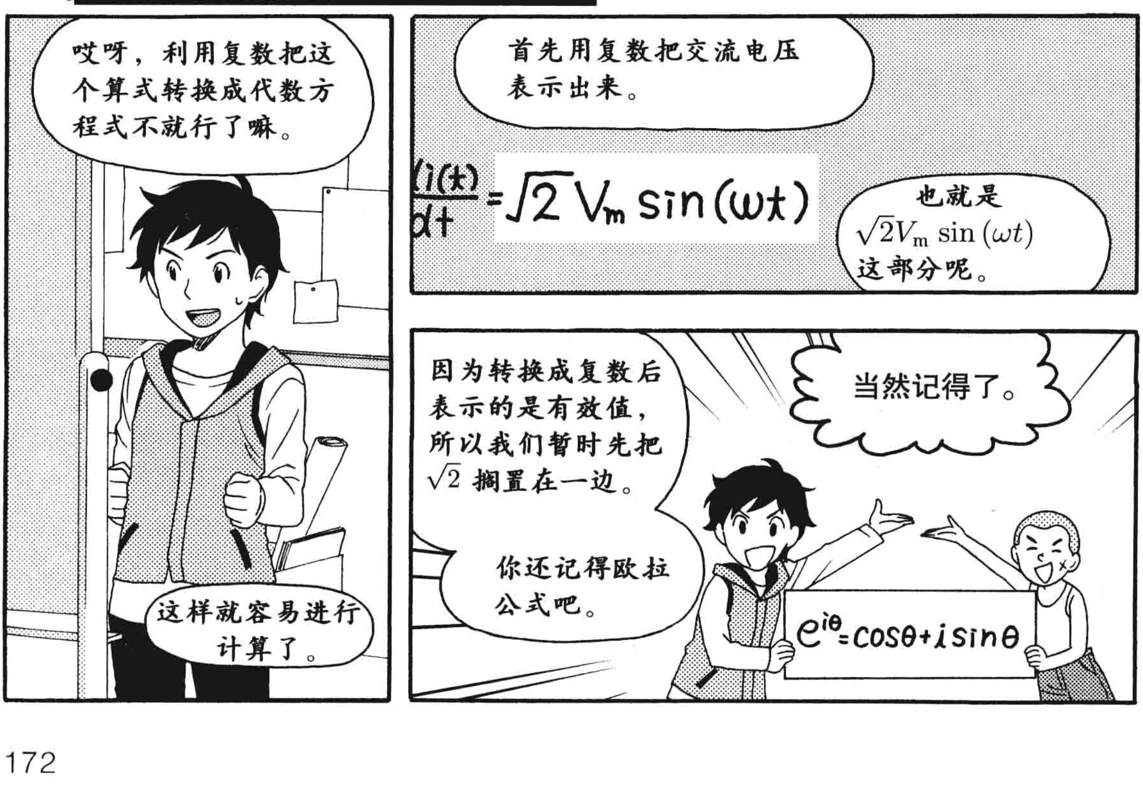
（因为西日本的家庭用电源频率 f 是 60Hz，所以 $\omega=2\pi f=2\pi\times 60=120\pi=376.99$〔rad/s〕）

ϕ 相位差 电压波形和电流波形的相位的差



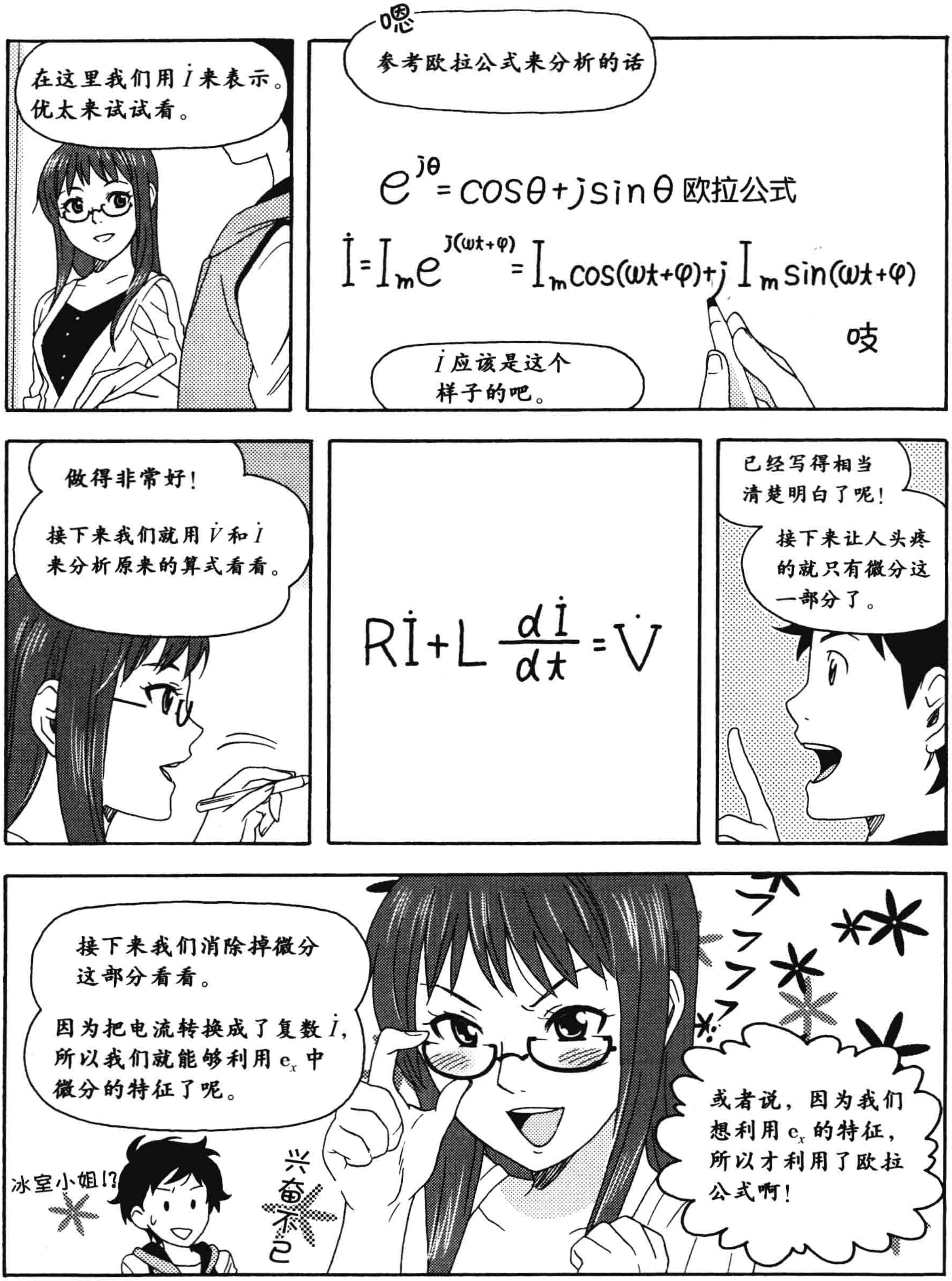

接下来我们分析由线圈和电阻组合而成的发电机在连接了插座之后的表达式。
吱
$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$
发电机的电压表达式是这样子的。
这个有点像在一开始看到的复杂的微分方程式的感觉呢。
$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$
如上所述，
要想求出电路中流动的电流的大小，需要首先求出这个算式中 $i(t)$ 的值。

2. 复数在工学中的应用


哎呀，利用复数把这个算式转换成代数方程式不就行了嘛。
这样就容易进行计算了。
首先用复数把交流电压表示出来。
$\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$
也就是 $\sqrt{2}V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)$ 这部分呢。
因为转换成复数后表示的是有效值，所以我们暂时先把 $\sqrt{2}$ 搁置在一边。
你还记得欧拉公式吧。
当然记得了。
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

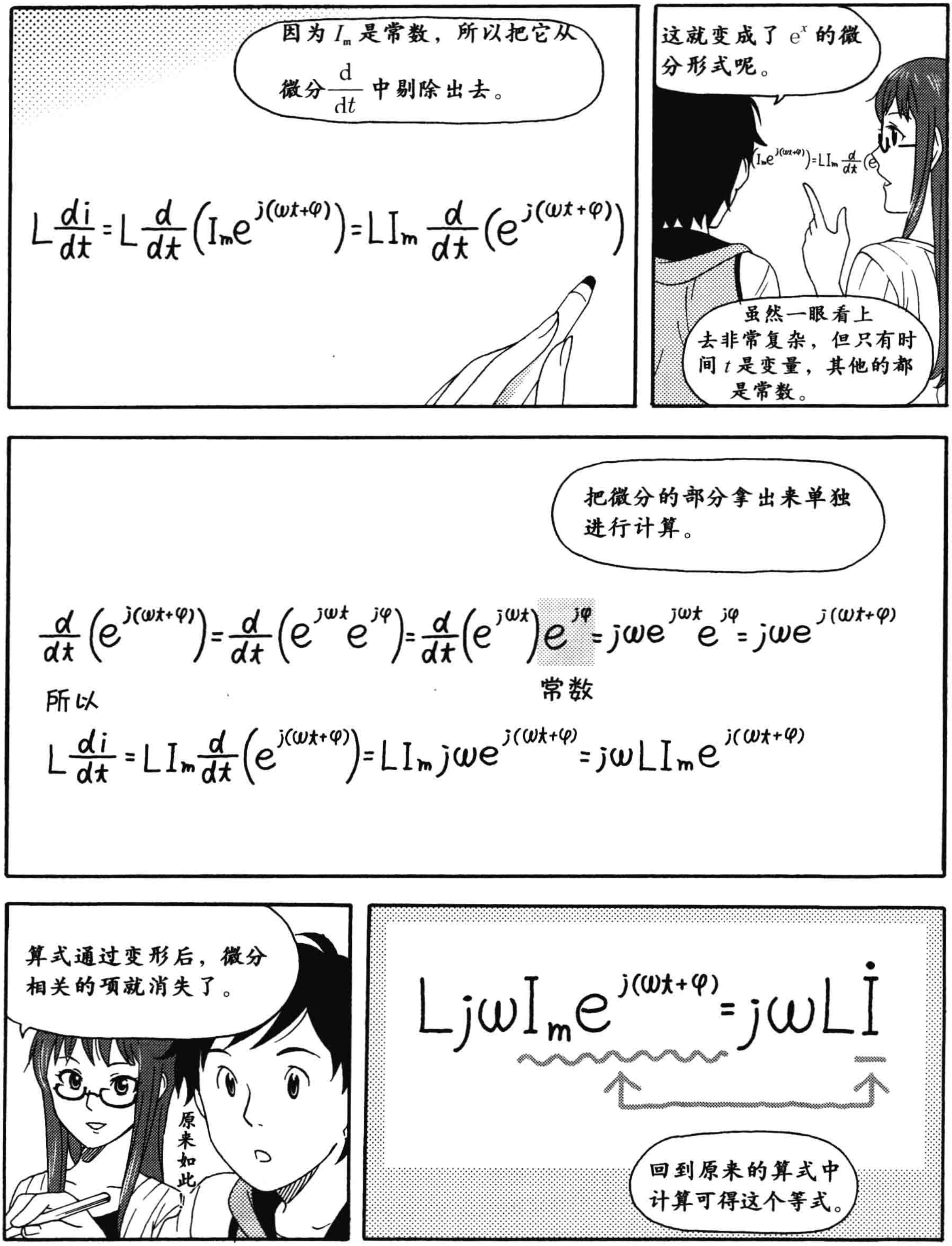

因为虚数 i 和电流容易混淆，所以，从现在开始我们用 j 来代替 i。
把欧拉公式和 $V_m\sin(\omega t)$ 并列写在一起，则如下所示。
$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$
$V_m\sin(\omega t)$
有 sin 存在的地方好像隐藏着什么玄机呢。
当然了！接下来才是关键中的关键呢。
$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$
$V_m e^{j\omega t}=V_m\cos(\omega t)+j\,V_m\sin(\omega t)$
吱吱
追加了一个实部，而 $V_m\sin(\omega t)$ 可以看作 $V_m e^{j\omega t}$ 的虚部。
如上所述，转换成复数之后，微分积分就变得简单多了。
随、随便这么追加内容能行吗!?
你为什么这么吃惊啊?
之后只要舍弃实部，只考虑虚部，结果不也是一样的吗?


这能行吗？
请不要随便追加内容！
欧拉会不会生气啊？
请回忆一下之前我们学过的复数运算。
实部和虚部并不是混淆在一起的，对吧。
让你这么一说也的确是这么回事儿……但真的能进展顺利吗？
数学就是这么妙趣横生啊！
在添加了很多内容，并转化成复数之后，电压用 $\dot{V}$ 来表示。
$\dot{V}=V_m e^{j\omega t}$
$\dot{V}$ 表示复数。
$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$
电流 $i(t)$ 也是如此，不转换成复数的形式就很难进行计算。
$\sqrt{2}I_m\sin(\omega t+\varphi)$
※ 这里的 I_m 指的是电流的有效值，跟表示虚部的 I_m 意思完全不同。
交流电流的表达式如上面的右图所示，这个你是知道的哈。
这个也跟交流电压一样，只要分析出 $I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ 的虚部，就能够转换成复数的形式。

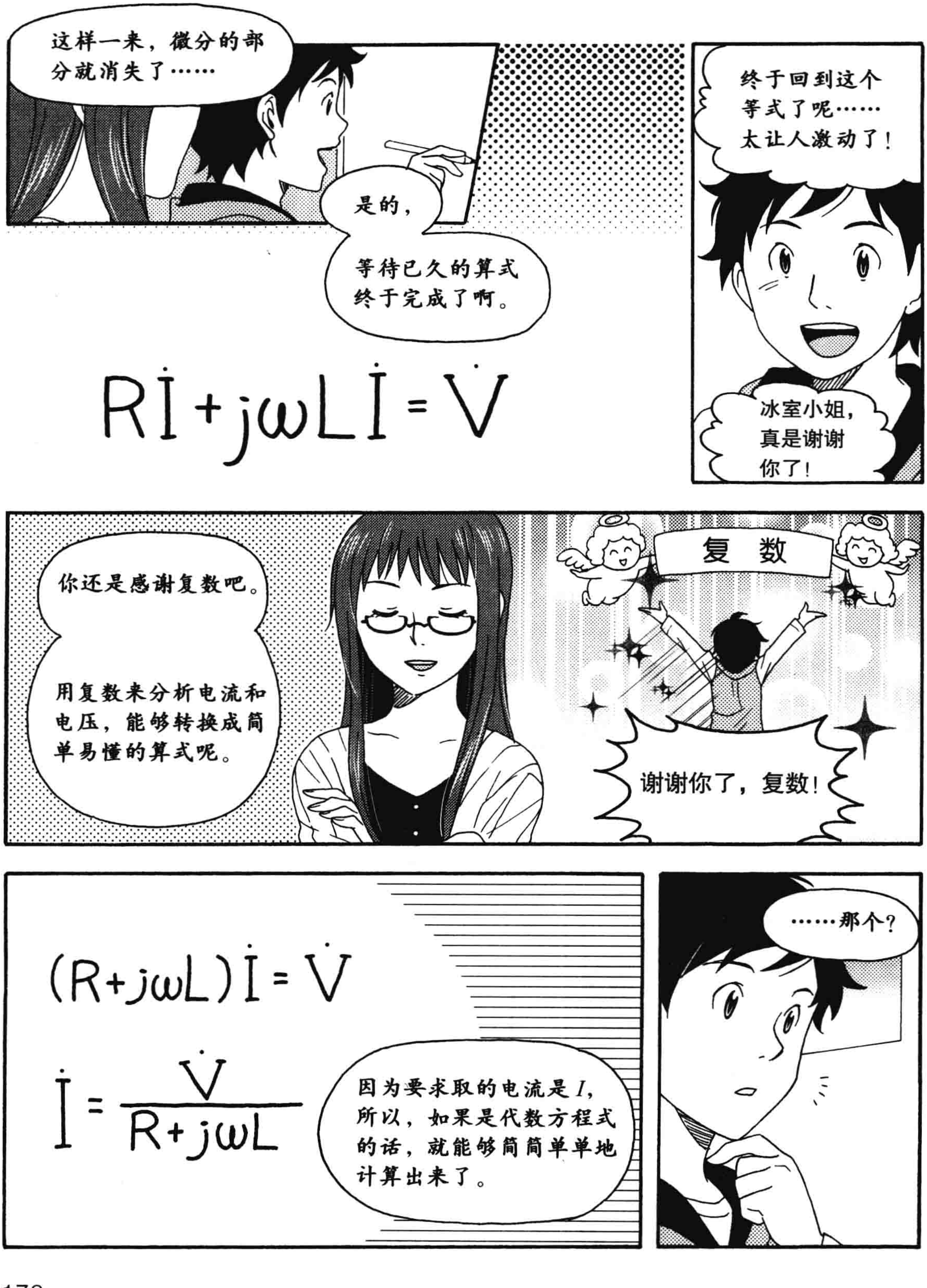


在这里我们用 $\dot{I}$ 来表示。优太来试试看。
嗯
参考欧拉公式来分析的话
$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ 欧拉公式
$\dot{I}=I_m e^{j(\omega t+\varphi)}=I_m\cos(\omega t+\varphi)+jI_m\sin(\omega t+\varphi)$
吱
$\dot{I}$ 应该是这个样子的吧。
做得非常好！
接下来我们就用 $\dot{V}$ 和 $\dot{I}$ 来分析原来的算式看看。
$R\dot{I}+L\frac{d\dot{I}}{dt}=\dot{V}$
已经写得相当清楚明白了呢！
接下来让人头疼的就只有微分这一部分了。
接下来我们消除掉微分这部分看看。
因为把电流转换成了复数 $\dot{I}$，所以我们就能够利用 e_x 中微分的特征了呢。
或者说，因为我们想利用 e_x 的特征，所以才利用了欧拉公式啊！
冰室小姐!?
兴奋不已


再进一步说明的话就是，因为想利用欧拉公式，所以才把它们转换成了复数，这么说一点都没有言过其实。
一说到数学，这个人就彻底变成了另外一个人。
嗯……e 是纳皮尔常数吗？
这一点应该不会已经忘记了吧！？
吱
吱
吱
嗤
无论怎样进行微分和积分，e^x 的形状都不会发生任何
变化，对吧。
纳皮尔常数 $e=2.718281828\cdots$
※ 请参考第 102 页。
哈哈
说的没错。
为了明确起见，
在此把 e^x 的微分列出来。
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$
$\frac{d}{dx}(e^{ax})=ae^{ax}$
接下来我们把那个微分的项进行变形看看。
$L\frac{d\dot{I}}{dt}$
$\dot{I}=I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$
$\dot{I}$ 中有了 e^x 的形状呢。



因为 I_m 是常数，所以把它从微分 $\frac{d}{dt}$ 中剔除出去。
$L\frac{di}{dt}=L\frac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right)=LI_m\frac{d}{dt}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$
这就变成了 e^x 的微分形式呢。
虽然一眼看上去非常复杂，但只有时间 t 是变量，其他的都是常数。
把微分的部分拿出来单独进行计算。
$\frac{d}{dt}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}e^{j\varphi}\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)e^{j\varphi}=j\omega e^{j\omega t}e^{j\varphi}=j\omega e^{j(\omega t+\varphi)}$
常数
所以
$L\frac{di}{dt}=LI_m\frac{d}{dt}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right)=LI_m j\omega e^{j(\omega t+\varphi)}=j\omega LI_m e^{j(\omega t+\varphi)}$
算式通过变形后，微分相关的项就消失了。
原来如此
$Lj\omega I_m e^{j(\omega t+\varphi)}=j\omega L\dot{I}$
回到原来的算式中计算可得这个等式。


这样一来，微分的部分就消失了……
是的，
等待已久的算式终于完成了啊。
Rİ+jωLİ=V̇
终于回到这个等式了呢……太让人激动了！
冰室小姐，真是谢谢你了！
你还是感谢复数吧。
用复数来分析电流和电压，能够转换成简单易懂的算式呢。
复数
谢谢你了，复数！
(R+jωL)İ=V̇
İ=V̇/(R+jωL)
因为要求取的电流是I，所以，如果是代数方程式的话，就能够简简单单地计算出来了。
……那个？


还真是呢，随便追加了个实部之后，就转换成复数了呢。
$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$
$V_m e^{j\omega t}=V_m\cos(\omega t)+jV_m\sin(\omega t)$
也就是说，如果不是只把虚部单独拿出来的话，原来的 $i(t)$ 就弄不清楚呢……
你记得还真清楚呢。真是太厉害了，优太！
微笑
$\dot{I}=\dfrac{\dot{V}}{R+j\omega L}$
那么，我们就把虚部从那里拿出来吧。
首先我们来着手求取 $\dot{I}$ 的大小 $|\dot{I}|$ 和辐角 $\angle\dot{I}$。
首先把它变形成 $a+jb$ 的形式。
分子分母同时乘以共轭复数 $R-j\omega L$……
$\dot{I}=\dfrac{\dot{V}}{R+j\omega L}=\dfrac{R-j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\dot{V}$
$=\underbrace{\left\{\underbrace{\dfrac{R}{R^2+(\omega L)^2}}_{\text{实部}}-j\underbrace{\dfrac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}}_{\text{虚部}}\right\}}_{\text{复数}}\underbrace{\dot{V}}_{\text{复数}}$
优太现在做题已经轻车熟路了！

接下来请求取 $\dot{I}$ 和 $|\dot{I}|$ 的值。

首先，2 个复数乘积的大小，等于这 2 个复数大小的乘积，也就是$\left|\dot{Z}_1\dot{Z}_2\right| = \left|\dot{Z}_1\right|\left|\dot{Z}_2\right|$，所以

$$
\begin{aligned}
\left|\dot{I}\right| &= \sqrt{\left[\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2+\left[\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2}\left|\dot{V}\right| \\
&= \sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{\left[R^2+(\omega L)^2\right]^2}}\left|V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}}V_{\mathrm{m}}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}}V_{\mathrm{m}}\sqrt{\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)} \\
&= \frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sqrt{1} \\
&= \frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}
\end{aligned}
$$

完全正确。但是，观察原来的算式可知，因为$\left|\dfrac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1}\right| = \dfrac{\left|\dot{Z}_2\right|}{\left|\dot{Z}_1\right|}$，所以只要计算分母的大小就可以了，这样进行计算更加简单方便哦。

$$
\begin{aligned}
\left|\dot{I}\right| &= \left|\frac{\dot{V}}{R+\mathrm{j}\omega L}\right| \\
&= \frac{\left|\dot{V}\right|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \\
&= \frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}
\end{aligned}
$$

这是不是也太简单了点儿啊，有这样的好方法，以后一定要早点教给我啊。

对不起啊，其实我一直都想告诉你的。好了，接下来我们继续求取辐角。

因为辐角 $\angle \dot{Z} = \tan^{-2}\left(\dfrac{\text{虚部}}{\text{实部}}\right)$……所以计算过程如下。

$$
\begin{aligned}
\angle \dot{I} &= \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{-\dot{V}\omega L}{R^2+(\omega L)^2}}{\dfrac{\dot{V}R}{R^2+(\omega L)^2}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{-\omega L}{R}\right) \\
&= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)
\end{aligned}
$$

这个计算过程也完全正确。但是，与原来的计算方法相比，辐角的计算也有更加简单的方法。

$$
\begin{aligned}
\angle \dot{I} &= \angle\left(\frac{\dot{V}}{R+\mathrm{j}\omega L}\right) \\
&= \angle \dot{V} - \angle(R+\mathrm{j}\omega L) \\
&= 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\
&= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)
\end{aligned}
$$

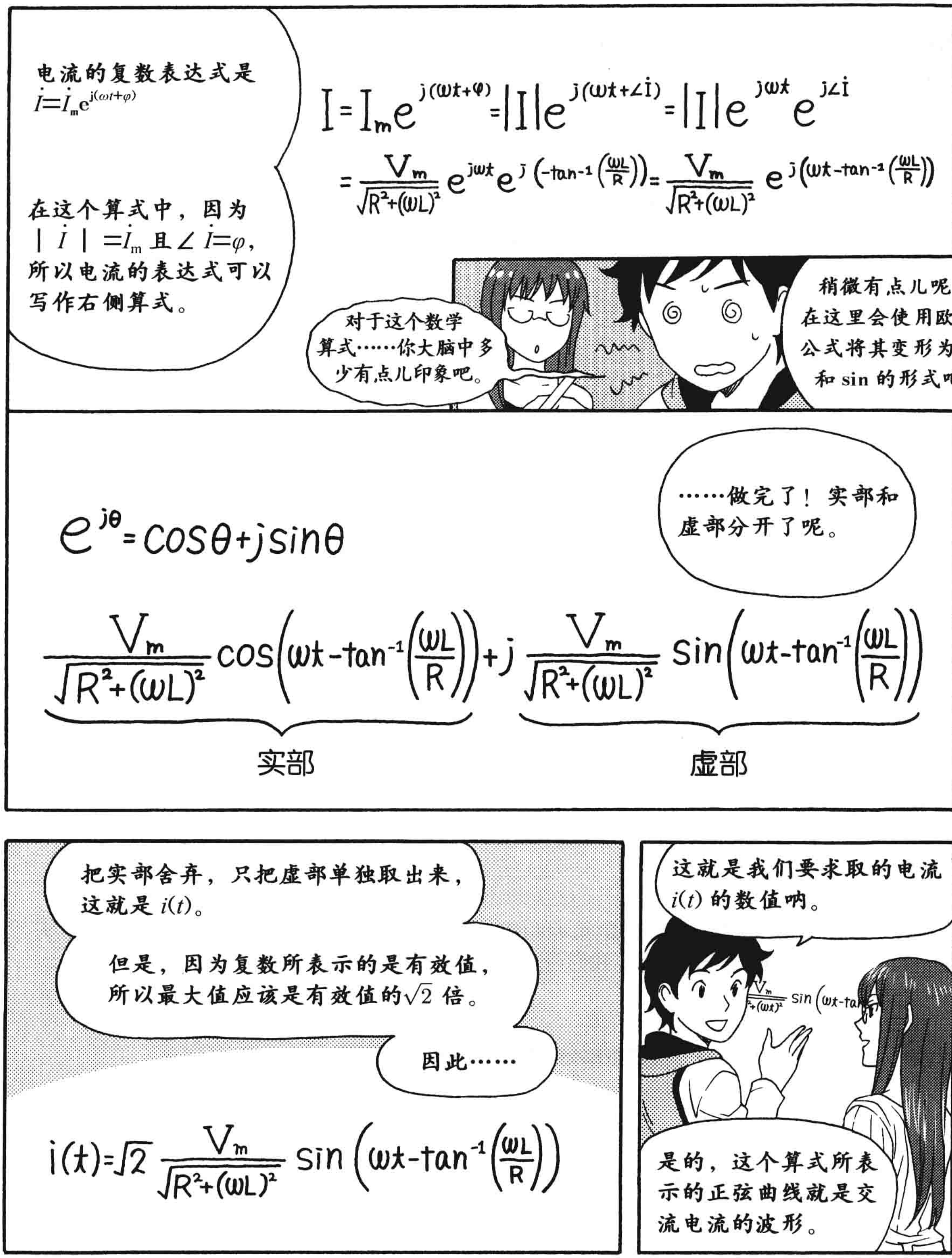
$\angle \dot{V}=0$, 是吗?

没错。原来的电压表达式是 $V_m\sin(\omega t)$，是吧。这跟电流的表达式不同，sin 函数中并没有 $+\varphi$ 这类的符号。所以，我们可以把它跟 ωt 的相位差看作 0。

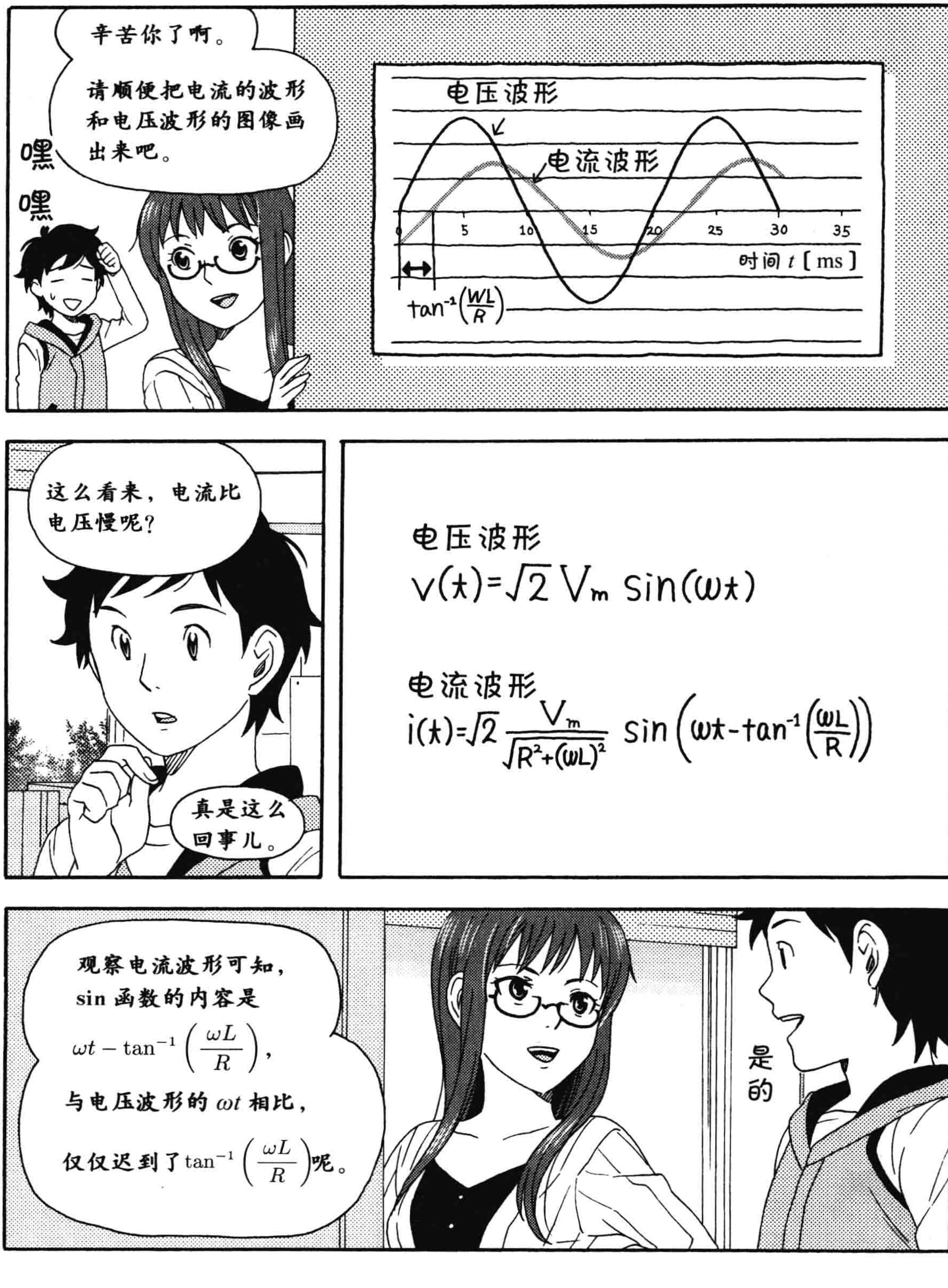
看，我们已经做好了把虚数部分单独取出来的准备工作。

$$\dot{I} = \left|\dot{I}\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle I}$$

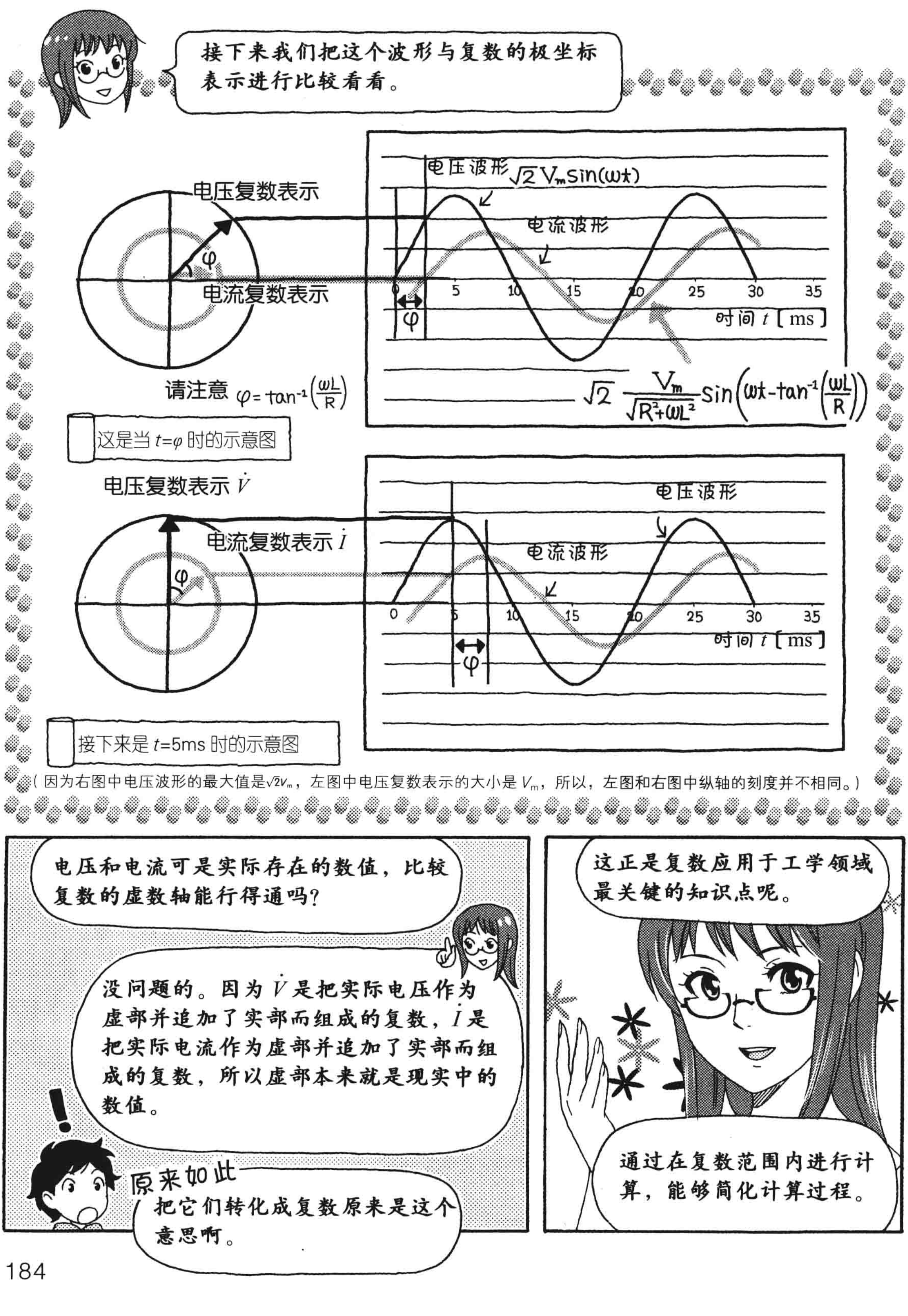
接下来请回忆起复数的指数表现形式。利用刚刚求出来的大小和辐角，将其用指数表现出来看看。



电流的复数表达式是 $\dot{I}=\dot{I}_m e^{j(\omega t+\varphi)}$
在这个算式中，因为 $|\dot{I}|=\dot{I}_m$ 且 $\angle\dot{I}=\varphi$，所以电流的表达式可以写作右侧算式。
$\dot{I}=\dot{I}_m e^{j(\omega t+\varphi)}=|\dot{I}|e^{j(\omega t+\angle\dot{I})}=|\dot{I}|e^{j\omega t}e^{j\angle\dot{I}}$
$=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}e^{j\omega t}e^{j\left(-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}e^{j\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}$
对于这个数学算式……你大脑中多少有点儿印象吧。
稍微有点儿呢。在这里会使用欧拉公式将其变形为 cos 和 sin 的形式吧。
$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$
……做完了！实部和虚部分开了呢。
$\underbrace{\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}_{\text{实部}}+j\underbrace{\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}_{\text{虚部}}$
把实部舍弃，只把虚部单独取出来，这就是 $i(t)$。
但是，因为复数所表示的是有效值，所以最大值应该是有效值的 $\sqrt{2}$ 倍。
因此……
$i(t)=\sqrt{2}\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$
这就是我们要求取的电流 $i(t)$ 的数值呐。
是的，这个算式所表示的正弦曲线就是交流电流的波形。

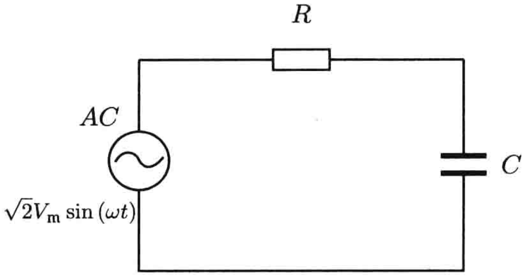


辛苦你了啊。
请顺便把电流的波形和电压波形的图像画出来吧。
嘿嘿
电压波形
电流波形
0 5 10 15 20 25 30 35
时间 t [ms]
$\tan^{-1}\left(\frac{WL}{R}\right)$
这么看来，电流比电压慢呢？
电压波形
$v(t)=\sqrt{2}\,V_m\sin(\omega t)$
电流波形
$i(t)=\sqrt{2}\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$
真是这么回事儿。
观察电流波形可知，sin 函数的内容是 $\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$，与电压波形的 ωt 相比，仅仅迟到了 $\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ 呢。
是的



接下来我们把这个波形与复数的极坐标表示进行比较看看。
电压复数表示
电流复数表示
φ
电压波形 $\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$
电流波形
0 5 10 15 20 25 30 35
时间 t [ms]
请注意 $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$
$\sqrt{2}\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega L^2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$
这是当 $t=\varphi$ 时的示意图
电压复数表示 $\dot{V}$
电流复数表示 $\dot{I}$
φ
电压波形
电流波形
0 5 10 15 20 25 30 35
时间 t [ms]
接下来是 t=5ms 时的示意图
（因为右图中电压波形的最大值是$\sqrt{2}V_m$，左图中电压复数表示的大小是 V_m，所以，左图和右图中纵轴的刻度并不相同。）
电压和电流可是实际存在的数值，比较复数的虚数轴能行得通吗？
没问题的。因为 $\dot{V}$ 是把实际电压作为虚部并追加了实部而组成的复数，$\dot{I}$ 是把实际电流作为虚部并追加了实部而组成的复数，所以虚部本来就是现实中的数值。
原来如此
把它们转化成复数原来是这个意思啊。
这正是复数应用于工学领域最关键的知识点呢。
通过在复数范围内进行计算，能够简化计算过程。

接下来再举个例子进行说明。我们一起来分析电阻和电容器所组成的串联电路的问题吧！



这是电路图呀！

这个电路能够用以下算式来表示。

$$Ri\,(t) + \frac{1}{C}\int i\,(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}V_{\mathrm{m}}\sin\,(\omega t)$$

这次不是微分，而是掺进了积分呢……

就算进行积分，e_x 的形状也不会发生变化，具体如下所示。

$$\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$$（忽略积分常数）

详细的展开式我们就省略不写了，但线圈的表达式是把微分部分 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ 替换成 $\mathrm{j}\omega$，把积分部分替换成 $\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$。

好了，接下来我们再使用 $\dot{V}$ 和 $\dot{I}$ 把这个电路的表达式转换成代数方程式看看。

$$R\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = \dot{V}$$

就是这个样子呢！

做得非常好！

下面把这个算式当做代数方程式来求解看看。

$$
\begin{aligned}
\left(R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\dot{I} &= \dot{V} \\
\dot{I} &= \dot{V}\frac{1}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \\
&= \dot{V}\frac{1}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\left(\frac{\mathrm{j}\omega C}{\mathrm{j}\omega C}\right) \\
&= \dot{V}\frac{\mathrm{j}\omega C}{\mathrm{j}\omega CR+1} \\
&= \dot{V}\frac{\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega CR}\left(\frac{1-\mathrm{j}\omega CR}{1-\mathrm{j}\omega CR}\right) \\
&= \dot{V}\frac{\mathrm{j}\omega C-\mathrm{j}^2\omega^2C^2R}{1+\omega^2C^2R^2} \\
&= \dot{V}\frac{\mathrm{j}\omega C-(-1)\,\omega^2C^2R}{1+\omega^2C^2R^2} \\
&= \dot{V}\frac{\mathrm{j}\omega C+\omega^2C^2R}{1+\omega^2C^2R^2} \\
&= \dot{V}\frac{\omega^2C^2R+\mathrm{j}\omega C}{1+\omega^2C^2R^2}
\end{aligned}
$$

在半道上，通过乘以共轭复数 $1-\mathrm{j}\omega CR$ 把算式进行了变形呢。

跟之前一样，接下来我们计算复数 $\dot{I}$ 的大小 $|\dot{I}|$ 和辐角 $\angle\dot{I}$。

在求取包含复数的分数的大小时，应该通过分析极坐标形式来进行计算。

$$
\begin{aligned}
\left|\dot{Z}\right| &= \left|\frac{a+\mathrm{j}b}{c+\mathrm{j}d}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}}{\sqrt{c^2+d^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|\left|\frac{\cos\theta_1+\mathrm{j}\sin\theta_1}{\cos\theta_2+\mathrm{j}\sin\theta_2}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|
\end{aligned}
$$

$$\because \left|\cos\theta_1+\mathrm{j}\sin\theta_1\right| = \sqrt{(\cos\theta_1)^2+(\sin\theta_1)^2} = 1$$

另外，$\theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ 。θ_2 的计算方法与 θ_1 相同。

哈哈，原来如此。

那么，$|\dot{I}|$ 的计算过程就交给你了。

套用刚才的算式可得……

$$\left|\dot{I}\right| = \left|\dot{V}\frac{\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega CR}\right| = \frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V_{\mathrm{m}}$$

其中，假设$\left|\dot{V}\right| = \dot{V}_{\mathrm{m}}$。

做完了。

还假设了$\left|\mathrm{j}\omega C\right| = \omega C$ 呢

做得非常好。那么，接下来请继续求出辐角$\angle \dot{I}$。
包含复数的分数的辐角（相位角）是这样求出来的。

$$
\begin{aligned}
\angle \dot{Z} &= \angle\left(\frac{a+\mathrm{j}b}{c+\mathrm{j}d}\right) \\
&= \angle\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}}{\sqrt{c^2+d^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}\right) \\
&= \angle\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)}\right) \\
&= \theta_1-\theta_2 \\
&= \angle(a+\mathrm{j}b)-\angle(c+\mathrm{j}d) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{d}{c}\right)
\end{aligned}
$$

那么，接下来进行计算。

$$
\begin{aligned}
\angle \dot{I} &= \angle\left(\frac{\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega CR}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\text{虚数}}{\text{实数}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{\omega C}{1+\omega^2C^2R^2}}{\dfrac{\omega^2C^2R}{1+\omega^2C^2R^2}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)
\end{aligned}
$$

另外，分子的辐角 – 分母的辐角可得

$$
\begin{aligned}
\angle \dot{I} &= \angle(\mathrm{j}\omega C)-\angle(1+\mathrm{j}\omega CR) \\
&= \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(\omega CR)
\end{aligned}
$$

（因为$\mathrm{j}\omega C$只是虚部，所以是虚数轴上的点，所以辐角等于$\frac{\pi}{2}$）

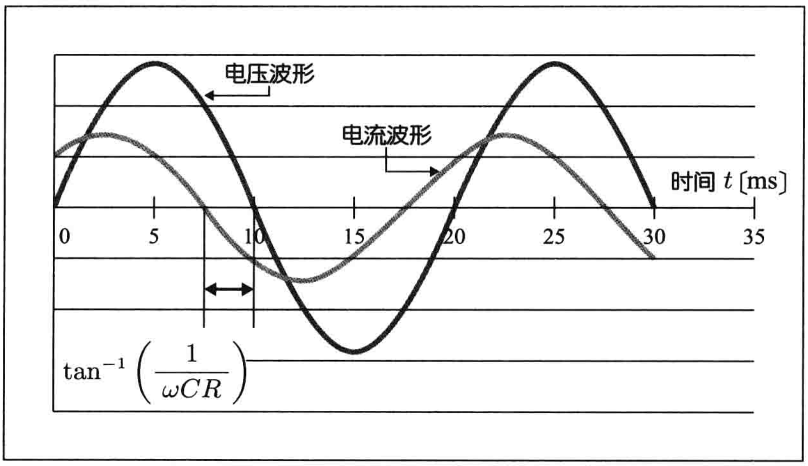
做完了！

辐角的计算过程也做得非常好，没有任何错误。那么，接下来我只要总结下就可以了。与电压的情况相同，因为复数的大小表示的是有效值，所以实际的波形应该是 $\sqrt{2}$ 倍……

$$i(t)=\sqrt{2}\frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$$

这就是表示电流波形的算式。

这个电路中电压和电流的波形图像分别如下所示。



这次，电流波形要比电压波形出现得早。

电压波形　$v(t)=\sqrt{2}V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)$

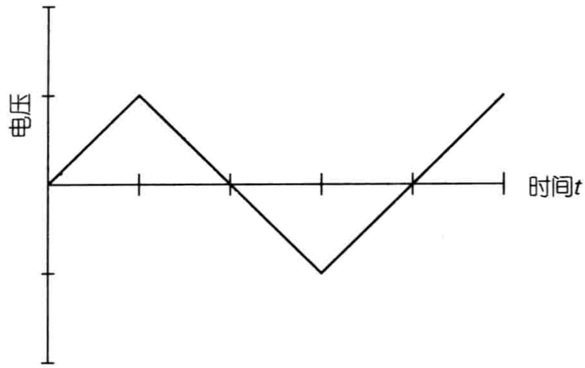
电流波形　$i(t)=\sqrt{2}\dfrac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\omega CR}\right)\right)$

完全正确。观察电流波形的算式可知，正弦函数的内容是 $\omega t+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$，对吧？与电压波形的 ωt 相比，只早出现 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$ 个相位。

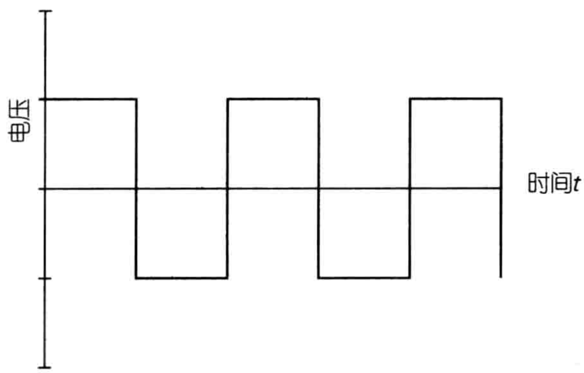
实际的电压、电流的表达式和复数领域中的表达式

表示实际波形的表达式（含时间 t）	复数领域中的表达式（不含时间 t）
电压：$\sqrt{2}V_m \sin(\omega t)$，$\sqrt{2}V_m \sin(\omega t+\theta_1)$ 等，V_m 是实效值。	电压：用 $\dot{V}=\dot{V}$（相位等于 0）或者 $\dot{V}=a+jb=\left\lvert\dot{V}\right\rvert e^{j\theta}1=\dot{V}_m e^{j\theta}1=\left\lvert\dot{V}\right\rvert\angle\theta_1=V_m\angle\theta_1$ 等算式来表示。a 和 b 是实数，j 是表示虚数的符号，相位是 θ_1，大小（绝对值）是实效值。
电流：$\sqrt{2}I_m\sin(\omega t+\theta_2)$ 等，其中，I_m 是实效值。	电流：用 $\dot{I}=c+jd=\left\lvert\dot{I}\right\rvert e^{j\theta}2=I_m e^{j\theta}2=\left\lvert\dot{I}\right\rvert\angle\theta_2=V_m\angle\theta_2$ 等算式来表示。c 和 d 是实数，j 是表示虚数的符号，相位是 θ_2，大小（绝对值）是实效值。
电阻：R〔Ω〕（欧姆） 自感系数：L〔H〕（频率） 静电容量：C〔F〕（法）	电阻：R〔Ω〕（欧姆） 自感系数：L〔H〕（赫兹） 静电容量：C〔F〕（法）
$\frac{d}{dt}$（时间微分）	$j\omega$
$\int dt$（时间积分）	$\frac{1}{j\omega}$
算式中包含波的大小（振幅），角频率 $\omega=2\pi f$，时间 t，角度（相位角）θ_1，微分，积分等量	只有复数的大小（绝对值）= 实效值和复数的相位角（辐角 θ_1 和 θ_2），没有与时间相关的项（ωt，$\frac{d}{dt}$，$\int dt$）

上表中，复数领域中的算式仅适用于电压波形和电流波形是正弦曲线的情况下。如果电压波形是三角波或者方形波，那么复数领域中的算式不能成立。



三角波的例子



方形波的例子

把截至目前学过的内容进行总结的话，具体步骤就是这样子的。
1 包含微分和积分的复杂难懂的算式？
2 变换到复数领域，消除掉角频率和时间（忘却时间），大小表示有效值。
3 求解代数方程式，计算复数的大小和偏角。
4 回到包含角频率和时间的实际波形上来（实际波形的最大值是有效值的$\sqrt{2}$倍）
5 能够求解包含微分和积分的复杂难懂的算式，求出表示波形的算式！
在表示交流电路这类波形的算式中，包含角频率和时间、时间微分$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$和时间积分$\left(\int \mathrm{d}t\right)$等非常复杂难懂的量。
所以才把它们转换成复数领域中的算式啊。
这样一来，我们就可以忽略角频率和时间因素，直接进行代数方程式的计算就可以了。
然后，最后再次回到原来的算式中……
是的，
因为能够在复数领域中进行计算，所以就不需要求解包含微分和积分的复杂难懂的算式了。
这就是复数的作用！

3. 家庭用电压的有效值

读者当中应该也有不少人认为我们的家庭用电源电压就是 100V，实际上家庭用电源电压的最大值是 $\sqrt{2} \times 100 = 141.42$〔V〕。那么，100V 又是什么意思呢？这指的是电压的有效值。所谓交流电压的有效值是 100V，指的是跟直流电压的 100V 起同样作用的交流电压。也就是说，当连接同一个电阻时，这个交流电压所产生的热量跟 100V 直流电压所产生的热量相等。因此，利用电阻所产生的热量烧开同样多少的水时，无论是用 100V 直流电压烧水，还是用有效值是 100V 的交流电压烧水，使水沸腾所需要的时间相同。

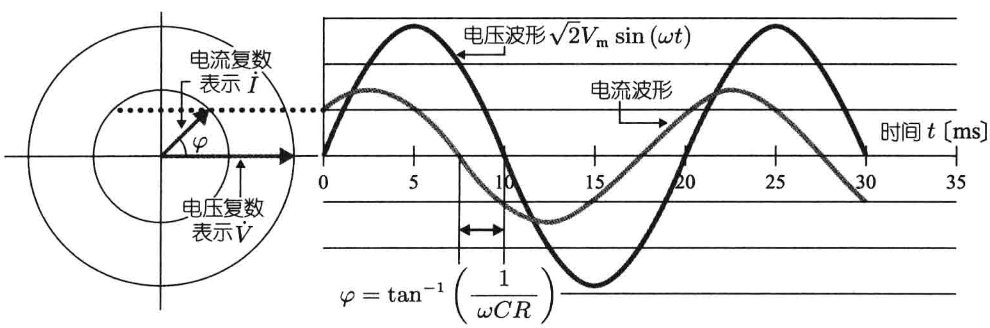
4. 正弦（sin）波的相对的位置关系

当电源是家庭用交流电压电源（正弦波）时，电压和电流的波形在时间上有一定的错开。也就是说，与电压波形相比，电流波形有时候相对领先，有时候相对落后。接下来我就对波形的领先和落后进行解释说明。

在电阻和电容器的串联电路中，假设电源电压是 $\sqrt{2}V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)$，那么电流就是

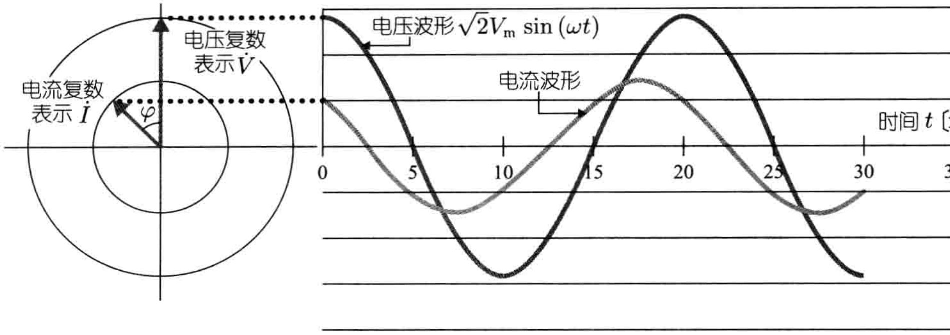
$$i(t) = \sqrt{2}\frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} V \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$$

用正弦（sin）波和复数坐标来表示这个算式的话，则如下图所示。当时间为 0 时，电压波形的大小也是 0。但是，就算时间为 0，电流波形也不等于 0。电流波形的相位仅仅领先 $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$。就算在左侧的复数表示当中，电流复数表示也比电压复数表示领先，也就是说，是按照逆时针方向进行移动。这种状态被称作电流波形相位领先于电压波形的位相。

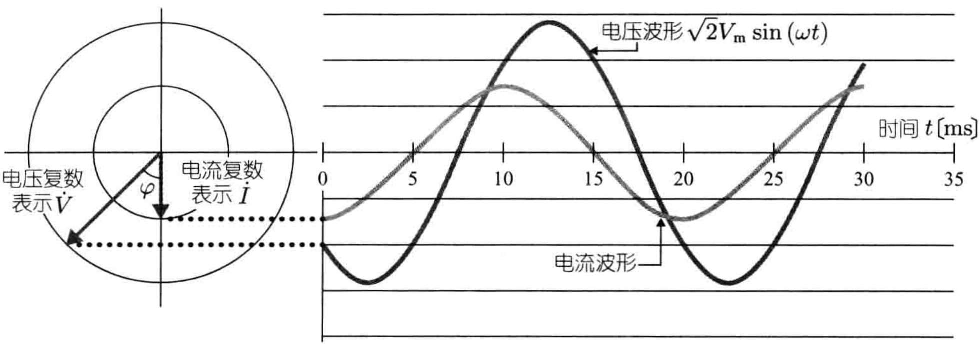


电阻和电容器串联电路的电压电流波形

接下来我们分析前一页中所展示的图像在经过 5s 后电压电流的图像，具体如下图所示。此时电压波形处于最大值状态，电压复数表示的方向垂直向上，因为电流复数表示的相位比电压领先，所以角度按逆时针方向领先 φ。



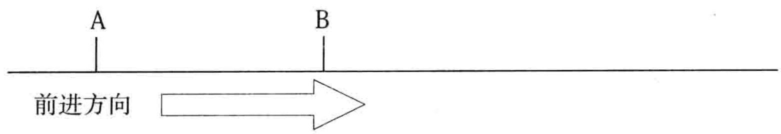
再经过 7.5s 后电压电流的波形则如下图所示。电压复数表示在第 3 象限，电流复数表示的方向垂直向下。但是，电压波形的相位却比电流波形领先。



在工学领域，关于这两个波形的位置关系，哪个相位领先、哪个相位落后存在争议。如果只考虑正弦波，当波形处于最大值时，如果电压波形比电流波形的位置靠右，那么我们可以看作电压波形比电流波形领先。从我个人而言，因为自小就学习数轴，所以对我来说右侧大于左侧，反过来看，也可以说电流波形比电压波形落后。但是，当采用复数表示时，以逆时针方向旋转为标准，分析哪个波形先行旋转也没有错误可言。

另外，在这里进行的解释说明，是以电压波形为标准来进行的分析，所以有电流波形领先的说法。当然，如果以电流波形为标准进行分析，也可以说电压波形落后了。分析的标准不同，其结果自然也截然不同。但类似的现象，在这个世界上有很多很多。

例如，假设 A 和 B 两个人进行跑步比赛，两个人的位置关系如下图所示。



假设前进方向是右方，那么在 A 看来 B 处于领先位置（跑在前方）。但是，在 B 看来 A 则处于落后位置（跟在后面）。在相对的位置关系中，既有领先，也有落后。

能够准确地分清楚正弦波的相位是领先还是落后，需要慢慢习惯。很多问题的解法也一定要慢慢习惯。

在交流电路中，多数情况都以电压为标准来分析和电流的相位关系。这是因为，最常用的电源是能够保持电压为定值的电压源。电池也是电压一定的电源。当电压源(电池)的两个端子之间没有连接任何介质（处于开放状态）时，则没有任何电流流过，但端子之间的电压仍然是定值。在开放状态下没有电流流过，能够减少浪费，提高效率。

但是，还有一种被称作电流源的物体，其性质是保持电流为定值。当电流源的两端处于开放状态时，电流的值是 0，但因为要保持一定的电流在流动，所以电流源两端的电压会上升到最高限度。因此，当电流源处于开放状态时，端子间的电压就会上升，如果接触到人体就会导致触电，非常危险。另外，在包含多个电压源、电流源和电阻的电路中，有时候想把电流源去除。也就是说，我们需要分析把电流源从电路中去除之后电路的情况（电流值的测量）。把电流源从电路中去除时，可以把它的两端进行短路连接（用导线连接），但如果进行短路连接，就会浪费电流，降低效率。

由于上述原因，所以电压为定值的电压源被使用得比较多（偶尔也有需要使用电流源的情况）。另外，家庭用商用电源的有效值也是定值 100V，根据连接的电阻值（因为是交流电，所以用阻抗这个术语更准确）的不同，电流会发生变化。因此，在电气电路中，一般以电压的相位为标准，来分析电流的相位是领先还是落后，当然这也存在一些争议。


虚数是想象中的数字，它是解决现实中困难的一种工具。
欧拉公式
数学Ⅲ
纳皮尔常数及其应用
虚数②
虚数①
说的很不错呢，完全正确！
你已经掌握了虚数和复数的相关知识了呢。
所以我的课程也该结束了。
非常感谢您！
冰室小姐？那个……
请稍等！


最后我还有句
话想说。
我……
我喜欢你。
啊……
好了！
已经结束了！
回家回家。
啪嗒」！
回家吗！？
喂，
什么呀！？
请稍等！我也喜欢
冰室小姐！
去去去去去
这个我早就知道了啊。
你之前不是已经说过了嘛。
嗯？
可是，你那个时候……
如果你讨厌
我的话，就
不可能每天
都来我这
里，对吧。
表白通过


后来我意识到了啊。你当时说的实在是太直接了……
啪
当时没想到那是表白！
还真是个痛快人啊。
对不起了……
你的意思是容易听懂吗？
是诚实的意思啦。
因为我以前经历过很多事情，所以我更看重数字。
咯噔
咯噔
但是，如果跟你一起的话，或许我能够面对现实……
我在讲课的时候，经常这样想。


如果我再那样继续下去的话，恐怕很快就会撑不住了……
绝对不会的！
像冰室小姐这样笑容如此灿烂的人，一定不会的！
绝对！
咔
嚓


啊!
怎么了?


优太 失恋纪念会!
奋斗!
失恋让男
人成长!
师兄……
我把它给忘了
……

附录 练习题

问题 1 请计算下列算式，将其简化成最简单的形式。其中 i 是虚数符号。

(1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^{12}=$

(2) $\left(\cos\frac{\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{18}\right)=$

(3) $\left(\cos\frac{2\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{15}\right)\div\left(\cos\frac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5}\right)=$

(4) 当$\theta=20°$时，$\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos 7\theta+\mathrm{i}\sin 7\theta)}{\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta}=$

问题 2 下面的电压都是瞬间值（时间函数），请求出它们的复数表示。请用 i 来作为虚数的表示符号，忽视 $e^{i\omega t}$。

(1) $v=\sqrt{2}\sin(\omega t)$

(2) $v_1=\sqrt{2}\times 50\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$

(3) $v_2=\sqrt{2}\times 100\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$

(4) $v_3=\sqrt{2}\times 200\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$

问题 3 **已知两个电压 v_1 和 v_2 的表达式，对于 v_1+v_2 的值，首先，请应用三角函数的加法定理计算出结果，并用 sin 函数的最简单的表达式表示（①），其次，分别把 v_1 和 v_2 转换成复数形式后再进行加法计算，然后将计算结果转换成 sin 函数的形式（②），并比较这两个结果。**

$$v_1 = 3\sqrt{2}\sin\omega t,\ v_2 = 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

① 应用加法定理进行计算

$$v_1 + v_2 \quad = \quad 3\sqrt{2}\sin\omega t + 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \ =$$

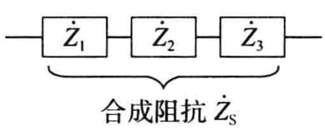
② 转换成复数后，再进行复数的加法计算，然后转换成 sin 函数的形式。

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 =$$

$$v_1 + v_2 \ =$$

问题 4 **有 3 个阻抗 $\dot{Z}_1$=2+3j，$\dot{Z}_2$=1+9j，$\dot{Z}_3$=4−7j 串联连接在一个电路中，请分别计算合成阻抗 $\dot{Z}_s$ 和合成导纳 $\dot{Y}_s$ 及其大小和辐角。其中，所谓阻抗，指的是交流电路中电压和电流的比$\left(\dfrac{\dot{V}}{\dot{I}}\right)$的复数表示形式，所谓导纳，指的是阻抗的倒数。**

在串联电路中，合成阻抗指的是每个阻抗的总和。j 是表示虚数的符号。



(1) 串联合成阻抗 $\dot{Z}_s$=

(2) 串联合成阻抗的大小 $|\dot{Z}_s|$=

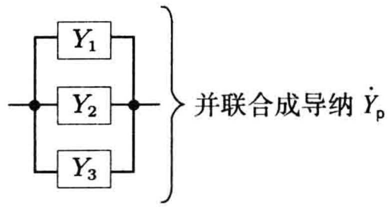
(3) 串联合成阻抗的辐角 $\angle\dot{Z}_s$ =

(4) 串联合成导纳 $\dot{Y}_s$ =

(5) 串联合成导纳的大小 $|\dot{Y}_s|$=

(6) 串联合成导纳的辐角 $\angle\dot{Y}_s$ =

问题 5 有 3 个导纳 $\dot{Y}_1$=5+2j，$\dot{Y}_2$=4−9j，$\dot{Y}_3$=1+6j 分别并联在一个电路中，请分别计算出合成阻抗 $\dot{Y}_p$ 和合成导纳 $\dot{Y}_p$ 及其大小和辐角。所谓导纳，指的是阻抗的倒数，当并联在一个电路中时，合成导纳等于所有导纳的总和。j 是表示虚数的符号。



(1) 并联合成导纳 $\dot{Y}_p =$

(2) 并联合成导纳的大小 $|\dot{Y}_p| =$

(3) 并联合成导纳的辐角 $\angle\dot{Y}_p =$

(4) 并联合成阻抗 $\dot{Z}_p =$

(5) 并联合成阻抗的大小 $|\dot{Z}_p| =$

(6) 并联合成阻抗的辐角 $\angle\dot{Z}_p =$

问题 6 请根据下面复数的表达式，推导出 C_x 和 R_x 的计算公式。也就是说，C_x 和 R_x 都是未知数，需要分析其他已知量的数值。其中 j 是虚数的表示符号。

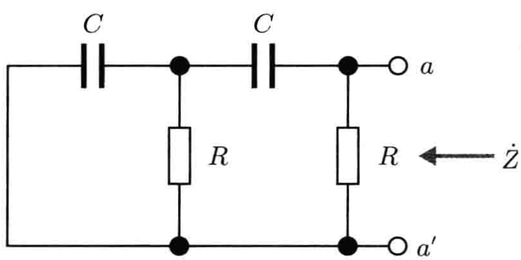
(1) $$R_3\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_x}+R_x\right)=R_4\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}+R_1\right)$$ 答案：$C_x =$ $R_x =$

(2) $$\left(\frac{R_3\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}}{R_3+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_x}+R_x\right)=R_4\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}$$ 答案：$C_x =$ $R_x =$

问题 7 在下面的二元一次方程组中，请求出 $\dot{I}_2$ 的值。也就是说，$\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 是未知数，其他的都是已知量。其中，j 是虚数的表示符号。

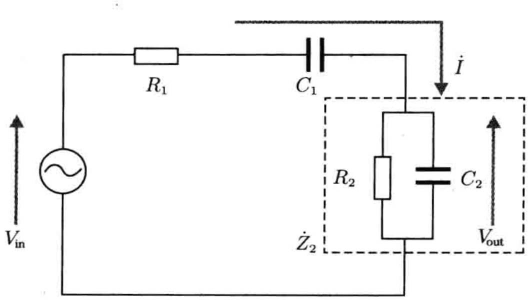
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_1 + R\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) = V \\ R\left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right) + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

问题 8 请求出下图中两个端子 a–a' 左侧的合成阻抗 $\dot{Z}$。其中，角频率用 ω 来表示，虚数的符号用 j 来表示。



$\dot{Z} = ?$

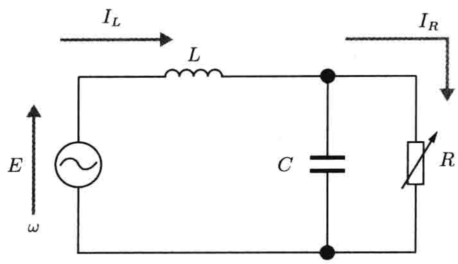
问题 9 请计算下图中输入电压 V_{in} 和输出电压 V_{out} 的比值 $\dfrac{V_{out}}{V_{in}}$。其中，角频率用 ω 来表示，虚数的符号用 j 来表示。



假设电路中流动的电流为 $\dot{I}$，那么输入电压 V_{in} 则等于电路中的整体阻抗 $\dot{Z}$ 和电流 $\dot{I}$ 的乘积。另外，输出电压 V_{out} 等于 R_2 和 C_2 的并联阻抗 $\dot{Z}_2$ 和电流 $\dot{I}$ 的乘积。

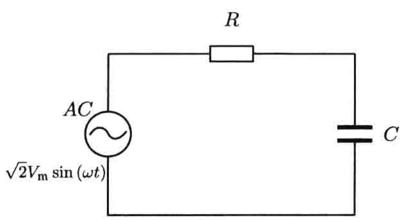
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = ?$$

问题 10 在下图所示电路中，请求出在什么条件下，就算可变电阻 R 的值发生变化，线圈 L 中流动的电流 I_L 的实效值也不发生变化。其中，电源电压的有效值用符号 E 来表示，角频率用符号 ω 来表示，虚数用符号 j 来表示。



条件是?

问题 11 在下图所示电阻 R 和电容器的串联电路中，假设电压的复数表示为 $\dot{V}$，电流的复数表示为 $\dot{I}$，那么，请证明 $R\dot{I}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}=\dot{V}$。



电阻和电容器的串联电路

问题 1 的解答

(1)
$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^{12}\\
=\;&(\cos 120^\circ+\mathrm{i}\sin 120^\circ)^{12}\\
=\;&\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]^{12}\\
=\;&\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}\right)^{12}\\
=\;&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi\times 12}\\
=\;&\mathrm{e}^{\mathrm{i}8\pi}\\
=\;&\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\right)^{4}\\
=\;&(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi)^{4}\\
=\;&(1)^{4}\\
=\;&1
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
&\left(\cos\frac{\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{18}\right)\\
=\;&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{18}}\\
=\;&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{7\pi}{18}\right)}\\
=\;&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2+17}{18}\pi\right)}\\
=\;&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{9}{18}\pi\right)}\\
=\;&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\\
=\;&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
=\;&\mathrm{i}
\end{aligned}$$

(3) $\left(\cos\dfrac{2\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{15}\right)\div\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= e^{i\left(\frac{2\pi}{15}\right)}\div e^{i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2\pi}{15}\right)}\times e^{-i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2\pi}{15}-\frac{4\pi}{5}\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2-4\times 3}{15}\pi\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2-12}{15}\pi\right)}\\
&= e^{i\left(-\frac{10}{15}\pi\right)}\\
&= e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}\\
&= \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\\
&= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}
$$

(4) 当 $\theta=20°$ 时，$\dfrac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos 7\theta+\mathrm{i}\sin 7\theta)}{\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\theta}e^{i7\theta}}{e^{i5\theta}}\\
&= \frac{e^{i(1+7)\theta}}{e^{i5\theta}}\\
&= \frac{e^{i8\theta}}{e^{i5\theta}}\\
&= e^{i(8-5)\theta}\\
&= e^{i3\theta}\\
&= e^{i3\times 20°}\\
&= e^{i60°}\\
&= \cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}
$$

问题 2 的解答

(1) $v=\sqrt{2}\sin(\omega t)$　复数表示：$\dot{V}=1$

(2) $v_1=\sqrt{2}\times 50\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

复数表示

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= 50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\\ &= 50\angle\frac{\pi}{3}\\ &= 50\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\\ &= 50\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\ &= 25+25\sqrt{3}\mathrm{i}\end{aligned}$$

(3) $v_2=\sqrt{2}\times 100\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

复数表示

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= 100\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\\ &= 100\angle\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 100\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\ &= 100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\\ &= 50\sqrt{3}-50\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

(4) $v_3=\sqrt{2}\times 200\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{4}\right)$

在这里，因为 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{2}=\cos\theta\times 0+\cos\theta\times 1=\cos\theta$，

假设 $\theta=\omega t-\dfrac{\pi}{4}$，那么，

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \sqrt{2}\times 200\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sqrt{2}\times 200\sin\left(\omega t+\frac{-\pi+2\pi}{4}\right)\\
&= \sqrt{2}\times 200\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

复数表示

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_3 &= 200\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\\
&= 200\angle\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 200\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\\
&= 200\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\\
&= 100\sqrt{2}+100\sqrt{2}\mathrm{i}\\
&= 100\sqrt{2}\,(1+\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

复数表示解答2

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \sqrt{2}\times 200\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\\
\dot{V}_3 &= 200\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=200\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= 200\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)(0+\mathrm{i}\times 1)\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\mathrm{i}\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}^2\right)\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-1)\right)\\
&= 100\sqrt{2}+100\sqrt{2}\mathrm{i}\\
&= 100\sqrt{2}\,(1+\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

问题 3 的解答

① 应用加法定理进行计算

$$\begin{aligned}
v_1+v_2 &= 3\sqrt{2}\sin\omega t+4\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 3\sqrt{2}\sin\omega t+4\sqrt{2}\left[\sin\omega t\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\omega t\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= 3\sqrt{2}\sin\omega t+4\sqrt{2}\,(\sin\omega t)\,\frac{1}{2}+4\sqrt{2}\,(\cos\omega t)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= 3\sqrt{2}\sin\omega t+2\sqrt{2}\sin\omega t+2\sqrt{6}\cos\omega t\\
&= 5\sqrt{2}\sin\omega t+2\sqrt{6}\cos\omega t\\
&= \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2}\left(\frac{5\sqrt{2}\sin\omega t+2\sqrt{6}\cos\omega t}{\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2}}\right)\\
&= \sqrt{50+24}\left(\frac{5\sqrt{2}\sin\omega t+2\sqrt{6}\cos\omega t}{\sqrt{50+24}}\right)\\
&= \sqrt{74}\left(\sin\omega t\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{74}}+\cos\omega t\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{74}}\right)
\end{aligned}$$

在这里，假设 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{74}}$ ，$\cos\theta=t\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{74}}$ ，$\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ ，那么

$$\begin{aligned}
v_1+v_2 &= \sqrt{74}\,(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)\\
&= \sqrt{74}\sin(\omega t+\theta)
\end{aligned}$$

只是，$\theta=\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$。

② 在转换成复数后，再进行复数的加法计算，然后转换成 sin 函数的形式。假设 v_1 的复数表示是 $\dot{V}_1$，v_2 的复数表示是 $\dot{V}_2$，复数表示的大小就是有效值，转换时忽略 $e^{i\omega t}$。

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1+\dot{V}_2 &= 3+4e^{i\frac{\pi}{3}}\\
&= 3+4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 3+4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= 3+2+2\sqrt{3}i\\
&= 5+2\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

因为大小 $\left|\dot{V}_1 + \dot{V}_2\right| = \sqrt{5^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25+12} = \sqrt{37}$，辐角$\angle\left(\dot{V}_1 + \dot{V}_2\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

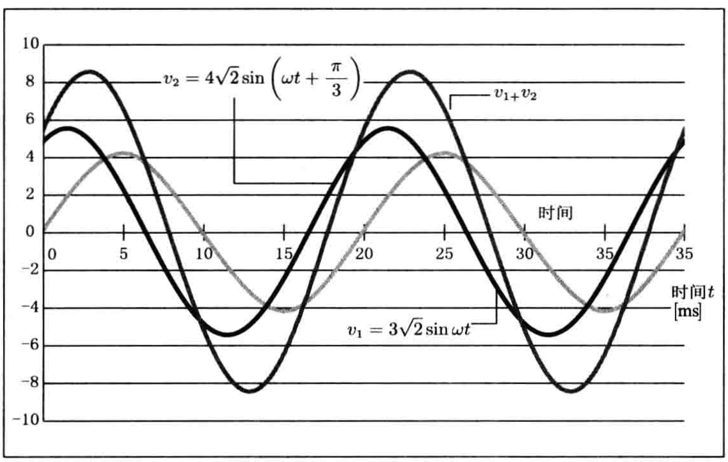
复数表示的大小就是有效值，所以乘以 $\sqrt{2}$ 倍可得

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \sqrt{2}\left|\dot{V}_1 + \dot{V}_2\right| \sin\left(\omega t + \angle\left(\dot{V}_1 + \dot{V}_2\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\sqrt{37}\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)\right) = \sqrt{74}\sin\left(\omega t + \theta\right) \end{aligned}$$

只是，$\theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 。

综上所述，①应用加法定理进行计算所得出的结果，和②在转换成复数后，再进行复数的加法计算，然后转换成 sin 函数的形式所得到的结果，两者是一致的。但是，电压 $v_{1+}v_2$ 这个和的计算过程，在复数领域内进行计算的话，计算量相对较少，更加简单。

两个电压波形 $v_1 = 3\sqrt{2}\sin\omega t$，$v_2 = 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$，以及两者相加之后的波形分别如下图所示。



问题 4 的解答

●因为，在串联电路中，合成阻抗等于所有阻抗的总和，所以

串联合成阻抗　$\dot{Z}_s = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = 2 + 3j + 1 + 9j + 4 - 7j = 7 + 5j$

串联合成阻抗的大小　$\left|\dot{Z}_s\right| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

串联合成阻抗的辐角　$\angle\dot{Z}_s = \tan^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) = 35.5° = 0.62〔\mathrm{rad}〕$

串联合成导纳　$$\dot{Y}_s = \frac{1}{\dot{Z}_s} = \frac{1}{7+5j} = \frac{7-5j}{(7+5j)(7-5j)}$$
$$= \frac{7-5j}{49+25} = \frac{7-5j}{74}$$

串联合成导纳的大小　$\left|\dot{Y}_s\right| = \frac{1}{\sqrt{7^2+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{49+25}} = \frac{1}{\sqrt{74}}$

串联合成导纳的辐角　$$\angle\dot{Y}_s = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{5}{74}}{\frac{7}{74}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{7}\right)$$
$$= -35.5° = -0.62〔\mathrm{rad}〕$$

问题 5 的解答

●因为合成导纳等于所有导纳的总和，所以

并联合成导纳　$\dot{Y}_p = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 = 5 + 2j + 4 - 9j + 1 + 6j = 10 - j$

并联合成导纳的大小　$\left|\dot{Y}_p\right| = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}$

并联合成导纳的辐角　$\angle\dot{Y}_p = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{10}\right) = -5.71° = -0.1〔\mathrm{rad}〕$

并联合成阻抗　$$\dot{Z}_p = \frac{1}{\dot{Y}_p} = \frac{1}{10-j}$$
$$= \frac{10+j}{(10-j)(10+j)}$$
$$= \frac{10+j}{100+1} = \frac{10+j}{101}$$

并联合成阻抗的大小 $\left|\dot{Z}_{\mathrm{p}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{10^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{101}}$

并联合成阻抗的辐角 $\angle\dot{Z}_{\mathrm{p}} = \tan^{-1}\left(\dfrac{\dfrac{1}{101}}{\dfrac{10}{101}}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{10}\right)$

$$= 5.71° = 0.1〔\mathrm{rad}〕$$

问题6的解答

$$(1)\quad R_3\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_x}+R_x\right) = R_4\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}+R_1\right)$$

$$\frac{R_3}{\mathrm{j}\omega C_x}+R_3R_x = \frac{R_4}{\mathrm{j}\omega C_1}+R_4R_1$$

在这里，等号两边的虚数相等，意味着等号两边的实部和虚部分别相等。所以

比较两个实部可知 $R_3R_x = R_4R_1$，所以 $R_x = \dfrac{R_4R_1}{R_3}$

比较两个虚部可知

$$\frac{R_3}{\omega C_x} = \frac{R_4}{\omega C_1}$$

$$C_xR_4 = C_1R_3$$

$$C_x = \frac{C_1R_3}{R_4}$$

答案 $C_x = \dfrac{R_3}{R_4}C_1 \qquad R_x = \dfrac{R_1}{R_3}R_4$

$$(2)\quad \left(\frac{R_3\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}}{R_3+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_x}+R_x\right) = R_4\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}$$

$$\left(\frac{R_3\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}}{R_3+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}}\times\frac{\mathrm{j}\omega C_3}{\mathrm{j}\omega C_3}\right)\left(\frac{1+\mathrm{j}\omega C_xR_x}{\mathrm{j}\omega C_x}\right) = \frac{R_4}{\mathrm{j}\omega C_1}$$

$$\left(\frac{R_3}{\mathrm{j}\omega C_3R_3+1}\right)\left(\frac{1+\mathrm{j}\omega C_xR_x}{\mathrm{j}\omega C_x}\right) = \frac{R_4}{\mathrm{j}\omega C_1}$$

在这里，因为左边的分子 × 右边的分母 = 右边的分子 × 左边的分母，所以

$$R_3(1+j\omega C_xR_x)\,j\omega C_1 = R_4(j\omega C_3R_3+1)\,j\omega C_x$$

等式两边同时除以 jω 可得

$$C_1R_3(1+j\omega C_xR_x) = C_xR_4(j\omega C_3R_3+1)$$

$$C_1R_3 + j\omega C_1R_3C_xR_x = C_xR_4 + j\omega C_xR_4C_3R_3$$

比较等号两边的实部可知，$C_1R_3 = C_xR_4$

$$C_x = \frac{R_3}{R_4}C_1$$

比较等号两边的虚部可知，

$$C_1R_3C_xR_x = C_xR_4C_3R_3$$

$$C_1R_x = R_4C_3$$

$$R_x = \frac{C_3}{C_1}R_4$$

答案 $C_x = \dfrac{R_3}{R_4}C_1 \qquad R_x = \dfrac{C_3}{C_1}R_4$

问题 7 的解答

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 + R\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) = V &&①\\ &R\left(\dot{I}_2 - \dot{I}_1\right) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2 = 0 &&②\end{aligned}\right\}$$

根据①可得

$$\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_1 - R\dot{I}_2 = V \qquad ③$$

根据②可得

$$-R\dot{I}_1 + \left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2 = 0 \qquad ④$$

根据④可得，$\dot{I}_1 = \dfrac{1}{R}\left(2R + \dfrac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2$，将其代入③可得

$$\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\frac{1}{R}\left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2 - R\dot{I}_2 = V$$

$$\left\{\frac{1}{R}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right) - R\right\}\dot{I}_2 = V$$

等式两边同时乘以$R(\mathrm{j}\omega C)^2$可得

$$\left\{R\frac{1}{R}(\mathrm{j}\omega C)\left(R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)(\mathrm{j}\omega C)\left(2R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)-RR(\mathrm{j}\omega C)^2\right\}\dot{I}=R(\mathrm{j}\omega C)^2 V$$

$$\left\{(\mathrm{j}\omega CR+1)(\mathrm{j}2\omega CR+1)-R^2(\mathrm{j}\omega C)^2\right\}\dot{I}_2=R(\mathrm{j}\omega C)^2 V$$

$$\left\{2(\mathrm{j}\omega CR)^2+\mathrm{j}\omega CR+\mathrm{j}2\omega CR+1+(\omega CR)^2\right\}\dot{I}_2=-R(\omega C)^2 V$$

$$\left\{1-2(\omega CR)^2+(\omega CR)^2+\mathrm{j}\omega CR+\mathrm{j}2\omega CR\right\}\dot{I}_2=-R(\omega C)^2 V$$

$$\left\{1-(\omega CR)^2+\mathrm{j}3\omega CR\right\}\dot{I}_2=-R(\omega C)^2 V$$

$$\dot{I}_2=\frac{-R(\omega C)^2 V}{1-(\omega CR)^2+\mathrm{j}3\omega CR}$$

解法 1

把两个方程式用矩阵表示则如下所示

$$\begin{bmatrix} R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & -R \\ -R & 2R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V\\ 0\end{bmatrix}$$

为了求出逆矩阵，首先来计算行列式 Det(Determinant 的缩写形式)。

因为矩阵$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$的行列式 Det 是，Det=$ad-bc$，所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det} &= \left(R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\left(2R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)-R^2\\
&= \left(\frac{\mathrm{j}\omega CR+1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\left(\frac{\mathrm{j}2\omega CR+1}{\mathrm{j}\omega C}\right)-R^2\\
&= \frac{2(\mathrm{j}\omega CR)^2+\mathrm{j}\omega CR+\mathrm{j}2\omega CR+1}{(\mathrm{j}\omega C)^2}-R^2\\
&= \frac{1-2(\omega CR)^2+\mathrm{j}3\omega CR+(\omega C)^2R^2}{-(\omega C)^2}\\
&= \frac{1-(\omega CR)^2+\mathrm{j}3\omega CR}{-(\omega C)^2}
\end{aligned}$$

矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的逆矩阵是$\dfrac{1}{\text{Det}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，因为逆矩阵 × 矩阵的结果是单位矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以

等式两边同时乘以矩阵$\begin{bmatrix} R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} & -R \\ -R & 2R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} \end{bmatrix}$的逆矩阵可得

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\text{Det}}\begin{bmatrix} 2R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} & R \\ R & R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-(\omega C)^2}{1-(\omega CR)^2+\text{j}3\omega CR}\begin{bmatrix} 2R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} & R \\ R & R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

只计算$\dot{I}_2$可得

$$\dot{I}_2 = \frac{-(\omega C)^2}{1-(\omega CR)^2+\text{j}3\omega CR}RV = \frac{-R(\omega C)^2V}{1-(\omega CR)^2+\text{j}3\omega CR}$$

另解 2

把两个方程式分别用矩阵来表示，应用克莱姆法则（详细内容请参考《漫画线性代数》（欧姆社 2008 年）第 117 页）可得

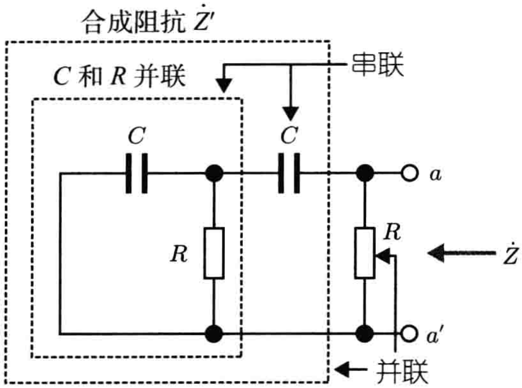
$$\begin{aligned}\dot{I}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} & V \\ -R & 0 \end{vmatrix}}{\text{Det}} \\ &= \frac{-(\omega C)^2}{1-(\omega CR)^2+\text{j}3\omega CR}\left[\left(R+\frac{1}{\text{j}\omega C}\right)\times 0+RV\right] \\ &= \frac{-R(\omega C)^2V}{1-(\omega CR)^2+\text{j}3\omega CR}\end{aligned}$$

这样计算更加简单。

只是，$\begin{vmatrix} R+\dfrac{1}{\text{j}\omega C} & V \\ -R & 0 \end{vmatrix}$是作为计算行列式的意义来被应用的。

问题 8 的解答

关于问题中的电路图可以进行如下分析，左侧的 RC 并联电路又串联连接了 C，最后又并联连接了 R。当 $\dot{Z}_1$ 和 $\dot{Z}_2$ 串联连接时，其合成阻抗的计算公式是 $\dot{Z}_S=\dot{Z}_1+\dot{Z}_2$，当 $\dot{Z}_3$ 和 $\dot{Z}_4$ 并联连接时，其合成阻抗的计算公式是 $\dot{Z}_p=\dfrac{\dot{Z}_3\dot{Z}_4}{\dot{Z}_3+\dot{Z}_4}$ 。因为静电容量为 C 的电容器的阻抗是 $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$，所以，在问题所在的电路中，去除掉最右侧的 R 之后的阻抗 $\dot{Z}'$ 的计算方法如下。



$$\dot{Z}'=\frac{R\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=\frac{R}{\mathrm{j}\omega CR+1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

因此，所要求取的合成阻抗 $\dot{Z}$ 的计算方法如下。

$$\begin{aligned}
\dot{Z} &= \frac{R\dot{Z}'}{R+\dot{Z}'}=\frac{R\left(\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega CR+1}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}{R+\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega CR+1}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \\
&= \frac{R\left(\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega CR+1}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}{R+\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega CR+1}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\times\frac{(\mathrm{j}\omega CR+1)\,\mathrm{j}\omega C}{(\mathrm{j}\omega CR+1)\,\mathrm{j}\omega C} \\
&= \frac{R\,(R\mathrm{j}\omega C+\mathrm{j}\omega CR+1)}{\mathrm{j}\omega CR\,(\mathrm{j}\omega CR+1)+R\mathrm{j}\omega C+\mathrm{j}\omega CR+1} \\
&= \frac{R\,(1+\mathrm{j}2\omega CR)}{(\mathrm{j}\omega CR)^2+\mathrm{j}\omega CR+\mathrm{j}\omega CR+\mathrm{j}\omega CR+1} \\
&= \frac{R\,(1+\mathrm{j}2\omega CR)}{1-(\omega CR)^2+\mathrm{j}3\omega CR}
\end{aligned}$$

问题 9 的解答

计算电路整体的阻抗 $\dot{Z}$。2 个阻抗串联的合成阻抗等于“所有阻抗相加”，2 个阻抗并联的合成阻抗等于 $\frac{乘法}{加法}$。另外，因为电容器的阻抗等于 $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$，所以

$$\dot{Z} = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \frac{R_2 \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{R_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}} = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \frac{R_2}{\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1}$$

所以，$\dot{V}_{\text{in}} = \left(R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \dfrac{R_2}{\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1} \right) \dot{I}$

另外，因为 $\dot{V}_{\text{out}} = \left(\dfrac{R_2 \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{R_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}} \right) \dot{I} = \dfrac{R_2}{\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1} \dot{I}$，所以

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{V}_{\text{out}}}{\dot{V}_{\text{in}}} &= \frac{\dfrac{R_2}{\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1} \dot{I}}{\left(R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \dfrac{R_2}{\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1} \right) \dot{I}} \\
&= \frac{\dfrac{R_2}{\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1}}{R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \dfrac{R_2}{\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1}} \times \frac{\mathrm{j}\omega C_1 (\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1)}{\mathrm{j}\omega C_1 (\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1)} \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega C_1 R_2}{R_1 \mathrm{j}\omega C_1 (\mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1) + \mathrm{j}\omega C_2 R_2 + 1 + \mathrm{j}\omega C_1 R_2} \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega C_1 R_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + \mathrm{j}\omega (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2)}
\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}
\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} &= \left| \frac{\dot{V}_{\text{out}}}{\dot{V}_{\text{in}}} \right| \\
&= \left| \frac{\mathrm{j}\omega C_1 R_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + \mathrm{j}\omega (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2)} \right| \\
&= \frac{\omega C_1 R_2}{\sqrt{(1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2)^2 + \omega^2 (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2)^2}}
\end{aligned}$$

问题 10 的解答

假设电路总体的阻抗为 $\dot{Z}$，因为线圈的阻抗为 $\mathrm{j}\omega L$，所以

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \mathrm{j}\omega L + \frac{R\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \\ &= \mathrm{j}\omega L + \frac{R}{1+\mathrm{j}\omega CR}\end{aligned}$$

假设线圈中流动的电流为 $\dot{I}_L$，因为电压 = 阻抗 × 电流，所以

$$E = \left(\mathrm{j}\omega L + \frac{R}{1+\mathrm{j}\omega CR}\right)\dot{I}_L$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{I}_L &= \frac{E}{\mathrm{j}\omega L + \dfrac{R}{1+\mathrm{j}\omega CR}} \\ &= \frac{E}{\mathrm{j}\omega L + \dfrac{R}{1+\mathrm{j}\omega CR}} \times \frac{1+\mathrm{j}\omega CR}{1+\mathrm{j}\omega CR}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_L &= \frac{1+\mathrm{j}\omega CR}{\mathrm{j}\omega L(1+\mathrm{j}\omega CR)+R}E \\ &= \frac{1+\mathrm{j}\omega CR}{R-\omega^2 CLR+\mathrm{j}\omega L}E\end{aligned}$$

根据题意，需要计算流经线圈 L 的电流 $\dot{I}_L$ 的实效值，假设其为 k'，那么

$$\left|\dot{I}_L\right| = \left|\frac{1+\mathrm{j}\omega CR}{R-\omega^2 CLR+\mathrm{j}\omega L}E\right| = \frac{\sqrt{1^2+(\omega CR)^2}E}{\sqrt{(R-\omega^2 CLR)^2+(\omega L)^2}} = k'$$

在这里，假设 $\dfrac{\sqrt{1^2+(\omega CR)^2}}{\sqrt{(R-\omega^2 CLR)^2+(\omega L)^2}} = \dfrac{k'}{E} = k$ ，那么

$$\sqrt{1^2+(\omega CR)^2} = k\sqrt{(R-\omega^2 CLR)^2+(\omega L)^2}$$

等式两边同时平方可得

$$1^2+(\omega CR)^2=k^2\left[(R-\omega^2CLR)^2+(\omega L)^2\right]$$

以 R 为标准整理等式可得

$$\begin{aligned}1+(\omega CR)^2 &= k^2(R-\omega^2CLR)^2+k^2(\omega L)^2\\ &= k^2\{R(1-\omega^2CL)\}^2+k^2(\omega L)^2\\ &= k^2R^2(1-\omega^2CL)^2+k^2(\omega L)^2\end{aligned}$$

$$k^2R^2(1-\omega^2CL)^2+k^2(\omega L)^2-(\omega CR)^2-1=0$$

$$R^2\left\{k^2(1-\omega^2CL)^2-(\omega C)^2\right\}+k^2(\omega L)^2-1=0$$

为了让流经线圈的电流 I_L 的实效值一定，不随着 R 的变化而变化，所以，需要求出无论 R 取什么数值，上述等式恒成立的条件，也就是说，需要求出

$$\left.\begin{aligned}&k^2(1-\omega^2CL)^2-(\omega C)^2=0 \quad ①\\ &k^2(\omega L)^2-1=0 \quad ②\end{aligned}\right\}\text{这两个等式同时成立的条件}$$

根据算式②可得 $k^2=\dfrac{1}{(\omega L)^2}$，将其代入算式①可得

$$\frac{1}{(\omega L)^2}(1-\omega^2CL)^2-(\omega C)^2=0$$

等式两边同时乘以$(\omega L)^2$可得

$$\begin{aligned}(1-\omega^2CL)^2-(\omega L)^2(\omega C)^2 &= 0\\ 1-2\omega^2CL+(\omega^2CL)^2-(\omega^2CL)^2 &= 0\\ 1-2\omega^2CL &= 0\\ 2\omega^2CL &= 1\\ \omega L &= \frac{1}{2\omega C}\end{aligned}$$

答案：就算可变电阻 R 发生变化，流经线圈的电流 I_L 的有效值不发生变化的条件是

$$\omega L = \frac{1}{2\omega C}。$$

问题 11 的解答

不使用复数来书写算式则如下所示

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)$$

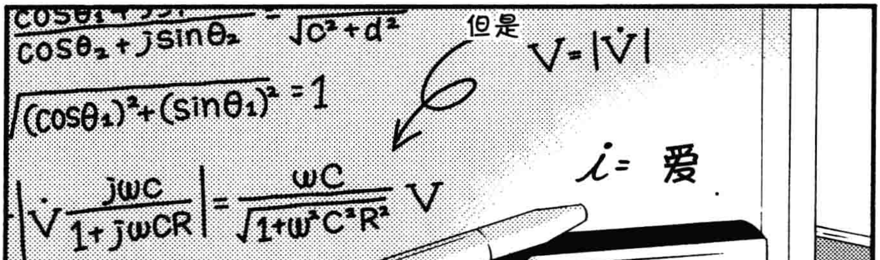
在这里，如果用复数来表示 $\sqrt{2}V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)$ 的话，则是 $\dot{V}=V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，如果电流用 $\sqrt{2}I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta)$ 来表示，那么其复数表示则是 $\dot{I}=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$，那么上述算式的复数表示则是

$$\begin{aligned}
R\dot{I} + \frac{1}{C}\int I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}\mathrm{d}t &= \dot{V} \\
R\dot{I} + \frac{1}{C}I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\int \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t &= \dot{V} \\
R\dot{I} + \frac{1}{C}I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\,\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} &= \dot{V} \\
R\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} &= \dot{V} \\
R\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} &= \dot{V} \\
R\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} &= \dot{V}
\end{aligned}$$

只是，在这里忽视了不定积分时的积分常数。

参考文献

- 『Newton 別冊“ありもしない”のに，難問解決に不可欠な数 虚数がよくわかる』（ニュートンプレス）(2009/8)
- 大浜 庄司 著『一番やさしい・一番くわしい 完全図解 電気回路』(日本実業出版社)(2009/7)
- 日本大学 / 髙橋 寛 監修，岩澤 孝治 / 中村 征壽 / 白川 真 共著『絵ときでわかる電気回路』(オーム社)(2001/2)
- ビーコム 著，こやまけいこ 作画『おはなし数学』(オーム社)(2008/10)
- 永田 博義 著『基礎から学ぶ電気回路計算』(オーム社)(2008/5)
- 大熊 康弘 著『図解でわかるはじめての電気回路』(技術評論社)(2000/1)
- 谷本 正幸 著『図解 はじめて学ぶ電気回路』(ナツメ社)(2006/1)
- 大伴 洋祐 著『すっきりわかる電気回路』(オーム社)(2010/8)
- 深川 和之 著『ゼロからわかる虚数・複素数』(ベレ出版)(2009/1)
- 浅川 毅 監修，熊谷 文宏 著『電気のための基礎数学』(東京電機大学出版局)(2003/11)
- 細野真宏 著『複素数・複素数平面が本当によくわかる本』(小学館)(2003/4)
- 鷹尾 洋保 著『複素数のはなし』(日科技連出版社)(1997/10)
- 崇城大学 / 家村 道雄，近畿大学 / 中原 正俊，崇城大学 / 原谷 直実，九州産業大学 / 松岡 剛志 共著『入門電気回路 基礎編』(オーム社)(2005/3)
- 高橋 信 著，井上 いろは 作画，トレンド・プロ制作『マンガでわかる線形代数』(オーム社)(2008/11)
- 小島 寛之 著，十神 真 作画，ビーコム 制作『マンガでわかる微分積分』(オーム社)(2005/12)
- 佐藤 実 著，あづま 笙子 作画，トレンド・プロ制作『マンガでわかる微分方程式』(オーム社)(2009/11)
- 藤瀧 和弘 著，マツダ 作画，トレンド・プロ制作『マンガでわかる電気』(オーム社)(2006/12)
- 飯田 芳一 著，山田 ガレキ 作画，パルスクリエイティブハウス 制作『マンガでわかる電気回路』(オーム社)(2010/2)
- 田中 賢一 著，高山 ヤマ 作画，トレンド・プロ 制作『マンガでわかる電子回路』(オーム社)(2009/10)
- 新田 英雄 著，高津 ケイタ 作画，トレンド・プロ制作『マンガでわかる物理　力学編』(オーム社)(2006/11)
- 重見 健一 著『理工系 数学再入門』(オーム社)(2006/6)



但是
V=|V̇|
i= 爱

（O-4844.0101）
责任编辑：张丽娜　赵丽艳
责任制作：董立颖　魏　谨
封面制作：泊　远

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社　社长　总编
“希望杯”全国数学邀请赛组委会　命题委员会主任　周國镇

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》　原副总编辑
中华炎黄文化研究会　常务副会长

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业　主任
大学日语教学研究会　会长　成同社

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学　能源与动力学院　博士　副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校　校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学　数学科学学院　博士

www.sciencep.com
ISBN 978-7-03-035244-6
9 787030 352446 >

科学出版社 东方科龙
联系电话：010—82840399
E—mail:boktp@mail.sciencep.com
有关网址：http://www.okbook.com.cn

销售分类建议：科普

定　价：32.00元